فصل اول

درس اول مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی و مجموع جملات آن

دنبالهٔ حسابی[1]: دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (به‌جز جملهٔ اول)، با اضافه کردن عددی ثابت به جملهٔ قبلی به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با d و جملهٔ اول را با a_1 یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنبالهٔ حسابی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1, \underbrace{a_1+d}_{a_2}, \underbrace{a_1+2d}_{a_3}, \underbrace{a_1+3d}_{a_4}, \dots, \underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}, \dots$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی یا همان جملهٔ nاُم به صورت مقابل می‌باشد:

$$\boxed{\text{جملهٔ عمومی}: a_n = a_1 + (n-1)d}$$

در این رابطه، n تعداد جملات است.

می‌دانیم اگر هر جمله را از جملهٔ بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، پس به طور کلی داریم:

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$$

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ پنجم -2 و جملهٔ دوازدهم 19 است. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_5 = -2 \Rightarrow a_1 + 4d = -2 \\ a_{12} = 19 \Rightarrow a_1 + 11d = 19 \end{cases} \Rightarrow d = 3, a_1 = -14$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -14 + 3(n-1) \Rightarrow a_n = 3n - 17$$

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\boxed{a_m - a_n = (m-n)d}$$

برای مثال، در سؤال قبل که $a_5 = -2$ و $a_{12} = 19$ است، داریم:

$$a_{12} - a_5 = (12-5)d \Rightarrow 19 - (-2) = 7d \Rightarrow 21 = 7d \Rightarrow d = 3$$

واسطهٔ حسابی: اگر a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ است. در این حالت می‌گوییم b واسطهٔ حسابی a و c می‌باشد.

رابطهٔ اندیس‌ها: اگر a_m، a_n، a_p و a_k جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی باشند که رابطهٔ $m+n=p+k$ بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$\boxed{a_m + a_n = a_p + a_k}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که هر جمله، واسطهٔ حسابی بین دو جمله‌ای است که به یک فاصله از طرفین آن قرار دارند.

$$\underbrace{a_{n-k}, \dots,}_{k\ \text{جملهٔ قبل}} a_n \underbrace{, \dots, a_{n+k}}_{k\ \text{جملهٔ بعد}} \qquad \boxed{a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n}$$

برای مثال با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$a_4 + a_{10} = a_5 + a_9 = 2a_7 \quad ; \quad a_5 + a_{14} + a_{17} = 3a_{12}$$

بررسی یک اشتباه متداول: توجه داشته باشید که در رابطهٔ اندیس‌ها، علاوه‌بر این‌که باید جمع اندیس‌ها در دو سمت تساوی برابر باشد، تعداد جملات نیز باید برابر باشد. پس دقت داشته باشید که:

$$\underbrace{a_4 + a_{10}}_{\text{دو جمله}} \neq \underbrace{a_{14}}_{\text{یک جمله}} \quad ; \quad \underbrace{a_5 + a_{14} + a_{17}}_{\text{سه جمله}} \neq \underbrace{2a_{18}}_{\text{دوجمله}}$$

تست: اگر در یک دنبالهٔ حسابی $a_1 = 1$ و $a_2 = \frac{5}{3}$ باشد، حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}}$ کدام است؟

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

پاسخ: قدرنسبت این دنباله برابر است با $d = a_2 - a_1 = \frac{2}{3}$. حال با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{33} + a_{35} + a_{37}} = \frac{3a_{17}}{3a_{35}} = \frac{a_{17}}{a_{35}} = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 34d} = \frac{1 + 16\left(\frac{2}{3}\right)}{1 + 34\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3+32}{3+68} = \frac{35}{71}$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱- به دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ عددی، تصاعد حسابی یا تصاعد عددی نیز می‌گویند.

درج m واسطهٔ حسابی بین دو عدد: چنان‌چه بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد m جمله قرار دهیم، به طوری که کلیهٔ اعداد با هم تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطهٔ حسابی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم، با احتساب جملات a و b در کل $m+2$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است a_{m+2} را تشکیل داد.

$$\underset{a_1}{a},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\dots,\bigcirc}_{m\text{جمله}},\underset{a_{m+2}}{b}$$

مثال: بین اعداد ۲ و ۲۷ چهار واسطهٔ حسابی درج کنید.

پاسخ: **روش اول:** چون چهار واسطه درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل شش جمله دارد که جملهٔ اول برابر ۲ و جملهٔ ششم برابر ۲۷ است:

$$\underset{a_1}{۲},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc}_{۴\text{جمله}},\underset{a_6}{۲۷}$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_6=a_1+5d \Rightarrow 27=2+5d \Rightarrow d=5$$

بنابراین واسطه‌ها به‌صورت ۲۲، ۱۷، ۱۲ و ۷ به دست می‌آیند.

روش دوم:

نکته: برای درج m واسطهٔ حسابی بین دو عـدد a و b به کمک رابطهٔ زیر، قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\underset{a_1}{a},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\dots,\bigcirc}_{m\text{جمله}},\underset{a_{m+2}}{b} \qquad d=\frac{b-a}{m+1}$$

به کمک نکتهٔ بالا داریم:

$$d=\frac{27-2}{5}=5 \Rightarrow \text{واسطه‌ها}: 7,12,17,22$$

نکته: جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی، عبارتی درجه اول برحسب n است:

$$a_n=a+(n-1)d=a+nd-d \Rightarrow a_n=\underbrace{d}_{A}n+\underbrace{a-d}_{B}=An+B$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، ضریب n، برابر قدرنسبت می‌باشد.

مثال: کدام‌یک از عبارات زیر می‌تواند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد؟

الف) $a_n=n^2+2n$ ب) $b_n=\frac{n}{n+1}$ پ) $c_n=-\frac{n}{2}+3$

پاسخ: عبارات «الف» و «ب» چون چندجمله‌ای درجهٔ اول نیستند، پس نمی‌توانند جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باشند. اما $c_n=-\frac{n}{2}+3$ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. (ضریب n، برابر قدرنسبت است.)

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در هر دنباله، مجموع n جملهٔ اول را با S_n نمایش می‌دهند:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 برای محاسبهٔ S_n کافی است، مجموع جملهٔ اول و جملهٔ nاُم را در نصف تعداد جملات، ضرب کنیم:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

اگر در رابطهٔ بالا از تساوی $a_n=a_1+(n-1)d$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)}$$

بدیهی است که هرگاه جملهٔ اول و قدرنسبت را داشتیم، از این رابطه و اگر به جای قدرنسبت، a_n را داشتیم از رابطهٔ قبلی برای محاسبهٔ مجموع جملات استفاده می‌کنیم.

در رابطهٔ S_n، مجموع $n-1$ جملهٔ اول، یعنی $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ برابر است با S_{n-1}، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_n=\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n \Rightarrow S_n=S_{n-1}+a_n$$

بنابراین با در اختیار داشتن S_n می‌توان به کمک رابطهٔ زیر، جملهٔ عمومی دنباله را تعیین کرد:

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-1}}$$

مثال: در دنبالهٔ‌حسابی $7,4,1,\cdots$ مجموع بیست جملهٔ اول را به دست آورید.

پاسخ: جملهٔ اول دنباله برابر ۷ و قدرنسبت برابر $4-7=-3$ می‌باشد، بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}(2(7)+19(-3))=10(14-57)=10(-43)=-430$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آورید.

پاسخ: مقدار $n+\cdots+۲+۱$، حاصل جمع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۱$ و $a_n=n$ است. پس طبق رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، مقدار آن برابر $\frac{n}{۲}(۱+n)$ می‌شود.

نتیجه: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$\boxed{۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

تست: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=۳n^۲+۵n$ به دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $a_n=۶n+۲$ ۲) $a_n=۶n+۱$

۳) $a_n=۱۴n-۶$ ۴) $a_n=۱۴n-۲$

پاسخ: **روش اول:** با توجه به این‌که $S_۱=a_۱$, $S_۲=a_۱+a_۲$ است داریم:

$$\begin{cases}S_۱=۳+۵=۸\Rightarrow a_۱=۸\\ S_۲=۳(۲)^۲+۵(۲)=۲۲\Rightarrow a_۱+a_۲=۲۲\xrightarrow{a_۱=۸}a_۲=۱۴\end{cases}\Rightarrow d=a_۲-a_۱=۱۴-۸=۶$$

جملهٔ عمومی : $a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۸+(n-۱)(۶)=۶n+۲$

روش دوم: از رابطهٔ $a_n=S_n-S_{n-۱}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=۳n^۲+۵n-(۳(n-۱)^۲+۵(n-۱))=۳n^۲+۵n-(۳n^۲-۶n+۳+۵n-۵)$$
$$=۳n^۲+۵n-(۳n^۲-n-۲)=۶n+۲$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: یک دنبالهٔ حسابی دارای ۲۹ جمله است. اگر مجموع سه جملهٔ وسط برابر ۱۸ باشد، مجموع ۲۹ جمله برابر کدام است؟

۱) ۱۷۴ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۶۲ ۴) ۱۸۲

پاسخ: چون دنباله ۲۹ جمله دارد، جملهٔ وسط، جملهٔ پانزدهم است $\left(\frac{۲۹+۱}{۲}=۱۵\right)$، در نتیجه داریم:

$$a_{۱۴}+a_{۱۵}+a_{۱۶}=۱۸\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}۳a_{۱۵}=۱۸\Rightarrow a_{۱۵}=۶$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۲۹}=\frac{۲۹}{۲}(a_۱+a_{۲۹})\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}\frac{۲۹}{۲}(۲a_{۱۵})=۲۹\times۶=۱۷۴$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: در یک دنبالهٔ حسابی $S_۸-S_۵=۷$ می‌باشد. حاصل عبارت $a_۴+a_۵+\cdots+a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۴۹ ۴) $\frac{۴۹}{۳}$

پاسخ: می‌دانیم $S_۸=a_۱+a_۲+\cdots+a_۸$ و $S_۵=a_۱+a_۲+\cdots+a_۵$ است، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_۸-S_۵=a_۶+a_۷+a_۸=۷\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}۳a_۷=۷\Rightarrow a_۷=\frac{۷}{۳}$$

$$a_۴+a_۵+\cdots+a_{۱۰}=(a_۴+a_{۱۰})+(a_۵+a_۹)+(a_۶+a_۸)+a_۷=۲a_۷+۲a_۷+۲a_۷+a_۷=۷a_۷=۷\left(\frac{۷}{۳}\right)=\frac{۴۹}{۳}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات هم‌فاصله، با حاصل‌ضرب جملهٔ وسط در تعداد جملات برابر است.

برای مثال در تست قبل داریم:

$$\overbrace{a_۴+a_۵+a_۶+\underbrace{a_۷}_{\text{جملهٔ وسط}}+a_۸+a_۹+a_{۱۰}}^{\text{۷ جمله}}=۷a_۷$$

نکته: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی (S_n)، عبارتی درجه دوم برحسب n است:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)=an+\frac{n^۲}{۲}d-\frac{n}{۲}d\Rightarrow S_n=\underbrace{\frac{d}{۲}}_{A}n^۲+\underbrace{\left(a-\frac{d}{۲}\right)}_{B}n=An^۲+Bn$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ S_n، عدد ثابت وجود ندارد و ضریب $n^۲$ برابر نصف قدرنسبت است.

تست: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = pn^۲ + (q+۳)n + q$ به‌دست می‌آید. اگر قدرنسبت برابر ۴ باشد، جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۷ ۳) ۳۲ ۴) ۲۱

پاسخ: در رابطهٔ S_n، نباید عدد ثابت داشته باشیم، پس $q=۰$ است. از طرفی ضریب $n^۲$ برابر نصف قدرنسبت $\left(\frac{d}{۲}\right)$ می‌باشد، یعنی $p=\frac{۴}{۲}=۲$ است. بنابراین S_n به صورت زیر در می‌آید:

$$S_n = ۲n^۲ + ۳n$$

$$a_۱ = S_۱ = ۲+۳=۵ \ ; \ a_۵ = a_۱ + ۴d = ۵ + ۴(۴) = ۲۱$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

دنبالهٔ هندسی و مجموع جملات آن

دنبالهٔ هندسی[1]: دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (به جز جملهٔ اول)، از ضرب جملهٔ قبل در یک عدد ثابت به دست آمده باشد. عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با q و جملهٔ اول را با $a_۱$ یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنبالهٔ هندسی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_۱, \underbrace{a_۱q}_{a_۲}, \underbrace{a_۱q^۲}_{a_۳}, \underbrace{a_۱q^۳}_{a_۴}, \dots, \underbrace{a_۱q^{n-۱}}_{a_n}, \dots$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی یا همان جملهٔ **n** اُم به صورت مقابل است:

$$\boxed{\text{جملهٔ عمومی: } a_n = a_۱q^{n-۱}}$$

در این رابطه، **n** تعداد جملات است.

می‌دانیم حاصل تقسیم هر جمله (به جز جملهٔ اول) به جملهٔ قبل برابر است با قدرنسبت، پس به طور کلی داریم:

$$\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-۱}} \quad (n>۱)}$$

نکته: در یک دنبالهٔ هندسی اگر جملهٔ اول مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه داریم:

۱ $q>۱$: جملات دنباله صعودی (نزولی) هستند.

۲ $q=۱$: جملات دنباله ثابت هستند.

۳ $۰<q<۱$: جملات دنبالهٔ نزولی (صعودی) هستند.

۴ $q<۰$: دنباله نه صعودی و نه نزولی می‌شود.

توجه: اگر هر جملهٔ یک دنباله (به جز جملهٔ اول) بزرگ‌تر یا مساوی جملهٔ قبل خود باشد، دنباله صعودی و اگر هر جمله، کوچک‌تر یا مساوی جملهٔ قبل خود باشد، دنباله نزولی است.

واسطهٔ هندسی: اگر اعداد a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، آن‌گاه $b^۲ = ac$ است. در این حالت می‌گوییم، b واسطهٔ هندسی a و c می‌باشد.

تست: اعداد $۲^a, ۴\sqrt{۲}, ۲^b$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند. واسطهٔ عددی بین a و b کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ:

$$(۴\sqrt{۲})^۲ = ۲^b \times ۲^a \Rightarrow ۳۲ = ۲^{a+b} \Rightarrow ۲^۵ = ۲^{a+b} \Rightarrow a+b=۵$$

در نتیجه، واسطهٔ حسابی (عددی) بین a و b برابر $\frac{a+b}{۲} = \frac{۵}{۲}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد: چنان‌چه بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد m جمله قرار دهیم، طوری که کلیهٔ اعداد با هم تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطهٔ هندسی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم با احتساب جملات a و b در کل $m+۲$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است $a_{m+۲}$ را تشکیل داد.

$$\underset{a_۱}{a}, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc}_{\text{جمله}\ m}, \underset{a_{m+۲}}{b}$$

مثال: بین اعداد $\frac{۱}{۴}$ و ۸- چهار واسطهٔ هندسی درج کنید.

پاسخ: چون چهار واسطه، درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل، شش جمله دارد که جملهٔ اول برابر $\frac{۱}{۴}$ و جملهٔ ششم برابر ۸- است:

$$\underset{a_۱}{\frac{۱}{۴}}, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc}_{\text{جمله}\ ۴}, \underset{a_۶}{-۸}$$

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_۶ = a_۱q^۵ \Rightarrow -۸ = \frac{۱}{۴}q^۵ \Rightarrow q^۵ = -۳۲ \Rightarrow q = -۲$$

بنابراین واسطه‌ها به صورت $-\frac{۱}{۲}, ۱, -۲, ۴$ به دست می‌آیند.

تذکر: برای درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b از رابطهٔ $q^{m+۱} = \frac{b}{a}$ نیز می‌توان قدرنسبت را تعیین کرد.

۱- به دنبالهٔ هندسی، تصاعد هندسی نیز می‌گویند.

مثال: آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنبالهٔ هندسی باشد و هم یک دنبالهٔ حسابی؟

پاسخ: دنبالهٔ ثابت a، $a,a,a,\dots,a$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱ و یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت صفر محسوب می‌شود. $(a\neq 0)$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل‌ضرب ۹ جملهٔ اول برابر ۸ است $(a_1a_2\cdots a_9=8)$. حاصل‌ضرب $a_2a_4a_6a_8$ برابر کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt[4]{2}$ ۴) ۴

پاسخ: با درنظر گرفتن $a_n=a_1q^{n-1}$ داریم:

$$a_1a_2\cdots a_9=8\Rightarrow a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdots(a_1q^8)=a_1^9q^{(1+2+\dots+8)}=a_1^9q^{36}=(a_1q^4)^9=8\Rightarrow a_1q^4=\sqrt[9]{8}=\sqrt[3]{2}$$

یادآور می‌شویم که $36=\frac{8\times 9}{2}=1+2+\dots+8$. حال داریم:

$$a_2a_4a_6a_8=(a_1q)(a_1q^3)(a_1q^5)(a_1q^7)=a_1^4q^{16}=(a_1q^4)^4=(\sqrt[3]{2})^4=2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

رابطهٔ اندیس‌ها: اگر a_m، a_n، a_p، a_k جملاتی از یک دنبالهٔ هندسی باشند که رابطهٔ $m+n=p+k$ بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$\boxed{a_ma_n=a_pa_k}$$

(توجه داشته باشید که از رابطهٔ اندیس‌ها در دنبالهٔ هندسی کم‌تر استفاده می‌شود.)

برای مثال در یک دنبالهٔ هندسی، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$a_4a_{10}=a_5a_9=(a_7)^2\ ;\quad a_6a_9a_{15}=a_7a_{10}a_{13}=(a_{10})^3;\quad a_2a_4a_6a_8=(a_5)^4$$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{2}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ:

$$\begin{cases}a_1+a_2=\frac{9}{2}\Rightarrow a_1+a_1q=\frac{9}{2}\\ a_4+a_5=36\Rightarrow a_1q^3+a_1q^4=36\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}}\frac{a_1+a_1q}{a_1q^3+a_1q^4}=\frac{\frac{9}{2}}{36}\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}\cancel{(1+q)}}{\cancel{a_1}q^3\cancel{(1+q)}}=\frac{\cancel{9}}{2\times\cancel{36}_4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{q^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

حال با توجه به رابطهٔ $a_1+a_1q=\frac{9}{2}$، مقدار a_1 را تعیین می‌کنیم:

$$a_1+a_1q=\frac{9}{2}\xrightarrow{q=2}a_1+2a_1=\frac{9}{2}\Rightarrow 3a_1=\frac{9}{2}\Rightarrow a_1=\frac{3}{2}$$

$$a_3=a_1q^2=\frac{3}{2}(2)^2=6$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: در یک دنبالهٔ عددی (حسابی)، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی صعودی‌اند، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: **روش اول:** می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2=ac$ است. در این تست، جملات اول (a_1)، پنجم (a_1+4d) و یازدهم (a_1+10d) از یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)\Rightarrow a_1^2+16d^2+8a_1d=a_1^2+10a_1d\Rightarrow 16d^2=2a_1d\xrightarrow{d\neq 0}a_1=8d$$

$$a_1,a_1+4d,a_1+10d\xrightarrow{a_1=8d}8d,12d,18d\ :\ \text{جملات متوالی دنبالهٔ هندسی}$$

می‌دانیم قدرنسبت در دنبالهٔ هندسی، از نسبت هر جمله به جملهٔ قبلی به دست می‌آید. پس $q=\frac{12d}{8d}=\frac{3}{2}$ $\left(q=\frac{18d}{12d}=\frac{3}{2}\right)$.

روش دوم:

نکته: اگر در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات mاُم، nاُم و pاُم $(p>n>m)$، به ترتیب جملات متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $q=\frac{p-n}{n-m}$ به دست می‌آید.

با توجه به نکتهٔ بالا $q=\frac{11-5}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q، مجموع n جملهٔ اول دنباله از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $(q \neq 1)$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

از رابطهٔ بالا در مواردی که $q=1$ باشد، نمی‌توان استفاده کرد. بدیهی است در حالتی‌که قدرنسبت برابر ۱ باشد، دنبالهٔ ثابت $a, a, a, \dots, a$ را داریم که مجموع n جملهٔ اول آن از رابطهٔ $S_n = na$ به دست می‌آید.

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول برابر ۳- و قدرنسبت برابر $\frac{1}{2}$ است. الف) وضعیت جملات دنباله از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟ ب) مجموع ۸ جملهٔ اول آن را به دست آورید.

پاسخ: **الف)** چون جملهٔ اول منفی و قدرنسبت $0 < q < 1$ است، پس دنباله صعودی می‌باشد. البته با نوشتن چند جملهٔ اول آن، این موضوع به سادگی قابل مشاهده است:

$$-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots$$

ب) برای محاسبهٔ S_8 با استفاده از رابطهٔ $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$S_8 = \frac{-3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-3\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{\frac{1}{2}} = -6\left(1-\frac{1}{256}\right) = \overset{-3}{\cancel{-6}}\left(\frac{255}{\underset{128}{\cancel{256}}}\right) = -\frac{765}{128}$$

نکته: در مسائل مربوط به دنباله‌های هندسی، از اعداد توان‌دار زیاد استفاده می‌شود، پس بهتر است برای این‌که سریع‌تر پاسخ بدهید آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$2^3=8 \ , \ 2^4=16 \ , \ 2^5=32 \ , \ 2^6=64 \ , \ 2^7=128 \ , \ 2^8=256 \ , \ 2^9=512 \ , \ 2^{10}=1024$$

$$3^3=27 \ , \ 3^4=81 \ , \ 3^5=243 \ , \ 4^3=2^6=64 \ , \ 4^4=2^8=256 \ , \ 4^5=2^{10}=1024$$

$$5^3=125 \ , \ 5^4=625 \ , \ 6^3=216$$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع هشت جملهٔ اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جملهٔ اول آن است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: با توجه به رابطهٔ $(q \neq 1)$، $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$S_8 = \frac{5}{4}S_4 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^8)}{\cancel{1-q}} = \frac{5}{4} \times \frac{\cancel{a_1}(1-q^4)}{\cancel{1-q}} \Rightarrow 1-q^8 = \frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \cancel{(1-q^4)}(1+q^4) = \frac{5}{4}\cancel{(1-q^4)}$$

$$\Rightarrow 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته: در دنبالهٔ هندسی بین مجموع n جملهٔ اول و مجموع $2n$ جملهٔ اول رابطهٔ زیر برقرار است: $(q \neq \pm 1)$

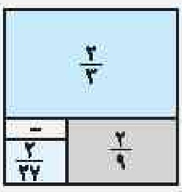
$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1$$

به عنوان مثال، در تست قبل برای تعیین قدرنسبت می‌توان گفت:

$$\frac{S_8}{S_4} = q^4 + 1 \Rightarrow q^4 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \dots$$

تست: طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا $\frac{2}{3}$ از مساحت آن را رنگ کرده، سپس $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به‌همین‌ترتیب در هر مرحله $\frac{2}{3}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹/۵ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴



پاسخ: **روش اول:** مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحلهٔ اول $\frac{2}{3}$ از سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحلهٔ دوم $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{3}$ باقی مانده، یعنی $\frac{2}{9}$ رنگ می‌شود. در مرحلهٔ سوم نیز $\frac{2}{3}$ از $\frac{1}{9}$ باقی مانده، یعنی $\frac{2}{27}$ رنگ می‌شود و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = \frac{2}{3}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{3}$ می‌دهند:

جملات دنباله : $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99/5}{100}$ باشد:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\cancel{\frac{2}{3}}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\cancel{\frac{2}{3}}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$S_n\ge\frac{99/5}{100}\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\ge\frac{99/5}{100}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^n\le 1-\frac{99/5}{100}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^n\le\frac{0/5}{100}\Rightarrow\frac{1}{3^n}\le\frac{1}{200}\Rightarrow 3^n\ge 200\Rightarrow n\ge 5$$

یعنی از مرحلهٔ پنجم، حداقل ۹۹/۵ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این‌که بگوییم مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99/5}{100}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{0/5}{100}$ باشد.

در مرحلهٔ اول $\frac{1}{3}$، مرحلهٔ دوم $\frac{1}{9}$، مرحلهٔ سوم $\frac{1}{27}$ و به همین ترتیب در مرحلهٔ n اُم، $\frac{1}{3^n}$ از مساحت مربع، رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{3^n}\le\frac{0/5}{100}\Rightarrow\frac{1}{3^n}\le\frac{1}{200}\Rightarrow 3^n\ge 200\Rightarrow n\ge 5$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

اثبات چند اتحاد مهم به کمک مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه فرض کنید:

$$S=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$$

S مجموع جملات دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=a$ می‌باشد، پس داریم:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S=\frac{1(1-a^n)}{1-a}=\frac{-(a^n-1)}{-(a-1)}=\frac{a^n-1}{a-1}\Rightarrow a^n-1=S(a-1)\Rightarrow a^n-1=(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})(a-1)$$

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ خواهیم داشت:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

با توجه به مطالب بالا اتحادهای مهم زیر را می‌توان نتیجه گرفت: $(n\in\mathbb{N})$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})\quad (\text{فرد } n)$$

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})\quad (\text{زوج } n)$$

مثال: حاصل عبارت $A=\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}+x^3+x$ را به‌ازای $x=\sqrt[4]{3}$ به‌دست آورید.

پاسخ: با تجزیهٔ عبارت x^5+1 داریم:

$$A=\frac{\cancel{(x+1)}(x^4-x^3+x^2-x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}+x^3+x=x^4-\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x}+1+\cancel{x^3}+\cancel{x}$$

$$=x^4+x^2+1\xrightarrow{x=\sqrt[4]{3}}3+\sqrt{3}+1=4+\sqrt{3}$$

تست: حاصل عبارت $\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: روش اول: عبارت $A=1-t+t^2+\cdots-t^7+t^8$، مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=-t$ می‌باشد. بنابراین:

$$A=S_9=\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\frac{(1-(-t)^9)}{1-(-t)}=\frac{1+t^9}{1+t}$$

عبارت $B=1-t^3+t^6$، مجموع ۳ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=-t^3$ می‌باشد. بنابراین:

$$B=S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{(1-(-t^3)^3)}{1-(-t^3)}=\frac{1+t^9}{1+t^3}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1+t^3}{1+t}=\frac{\cancel{(1+t)}(1-t+t^2)}{\cancel{1+t}}=1-t+t^2=1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

$$=1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{18+2\sqrt{17}}{4}=1+\frac{-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4}=1+4=5$$

روش دوم: با توجه به اتحادهای گفته‌شده داریم:

$$t^9+1=(t+1)(t^8-t^7+\cdots-t+1) \quad , \quad t^9+1=((t^3)^3+1)=(t^3+1)(t^6-t^3+1)$$

$$\Rightarrow \frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{\frac{\cancel{t^9+1}}{t+1}}{\frac{\cancel{t^9+1}}{t^3+1}}=\frac{t^3+1}{t+1}=\frac{\cancel{(t+1)}(t^2-t+1)}{\cancel{(t+1)}}=t^2-t+1 \xrightarrow{\text{مانند روش اول}} 5$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

دنبالهٔ حسابی و مجموع جملات آن

۱- حاصل $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) n^2 ۲) $(n+1)^2$ ۳) $(2n-1)^2$ ۴) n^2-1

۲- بر محیط دایره‌ای ۲۰ نقطهٔ متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز به دست آمده کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۴۲۰

۳- اگر $1, x, y, \frac{5}{2}$ چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۴- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ نوزدهم برابر ۱۰ می‌باشد. مجموع ۳۷ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۳۷۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۷۰ ۴) ۱۳۵

۵- در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم، نصف جملهٔ سوم می‌باشد. مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله صفر است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=4n^2+3n$ به‌دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنبالهٔ a_n کدام است؟ کتاب درسی

۱) $a_n=8n+1$ ۲) $a_n=8n-1$ ۳) $a_n=4n+3$ ۴) $a_n=4n+1$

۷- جملهٔ چهارم و شانزدهم از یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب ۱ و ۱۷ می‌باشند. مجموع ۱۳ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۵

۸- در دنبالهٔ حسابی ... ,۲۱-, x, ۲۷- مجموع جملات منفی کدام است؟

۱) ۱۳۵- ۲) ۱۵۰- ۳) ۷۵- ۴) ۲۷۰-

۹- در دنبالهٔ حسابی ... ,۵,۸,۱۱ حداقل چند جملهٔ آن را با هم جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۵۰۰ شود؟ کتاب درسی

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۰- بین اعداد ۱۳- و ۷۱، بیست واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت دنباله و مجموع این بیست واسطهٔ حسابی به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟

۱) ۵۸۰ ،۴ ۲) ۵۹۳ ،۴ ۳) ۵۸۰ ،۳ ۴) ۵۹۳ ،۳

۱۱- در یک دنبالهٔ عددی مجموع ۲۰ جملهٔ اول، سه برابر مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم آن برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم آن کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸ ریاضی داخل ۹۰

۱۲- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a، اگر یک واحد به قدرنسبت افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰ ریاضی داخل ۸۳

۱۳- مجموع اعداد طبیعی فرد و بخش‌پذیر بر عدد ۳ که کوچک‌تر از ۱۰۱ می‌باشند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

۱۴- مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟ ریاضی داخل ۹۸

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

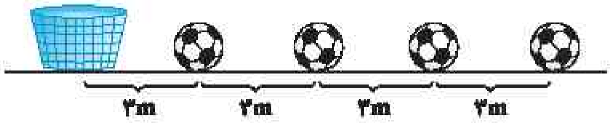
۱۵- مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی مضرب ۷ کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۳۵۱۶۸ ۲) ۶۹۲۳۷ ۳) ۷۰۴۰۰ ۴) ۷۰۳۳۶

۱۶- مجموع اعداد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد ۴ برابر ۲ باشد، کدام است؟

۱) ۴۷۵۲ ۲) ۴۹۲۸ ۳) ۴۹۵۰ ۴) ۴۹۹۵

۱۷- مطابق شکل، تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصلهٔ ۳ متر از هم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۳ متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، او چند توپ را در سبد انداخته است؟ کتاب درسی



۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۸- مجموع n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-۱۵)}{۶}$ می‌باشد. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۹ ۲) $\frac{۲۹}{۳}$ ۳) $\frac{۴۹}{۳}$ ۴) ۱۸

۱۹- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n}{۲}-۱$، مجموع جملات متوالی با شروع از جملهٔ دهم و ختم به جملهٔ سی‌اُم کدام است؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۸۹ ۳) ۱۹۰ ۴) ۲۱۰

۲۰- در یک دنبالهٔ عددی، مجموع ۴ جملهٔ اول برابر ۱۵ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن برابر ۳۰ می‌باشد. جملهٔ یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۲۱- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول، $\frac{۱}{۲}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی می‌باشد. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲- یک دنبالهٔ حسابی دارای ۴۱ جمله است. اگر مجموع ۵ جملهٔ وسط برابر ۲۰ باشد، مجموع این ۴۱ جمله کدام است؟

۱) ۱۲۳ ۲) ۱۶۴ ۳) ۲۰۵ ۴) ۲۴۶

۲۳- در یک دنبالهٔ حسابی $S_{۱۰}-S_۷=۶$ است. حاصل عبارت $a_۶+a_۷+...+a_{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۲۴- در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ کتاب درسی

۲۵- در دو دنبالهٔ حسابی به صورت‌های ...,۲,۴,۶ و ...,۵,۸,۱۱ مجموع جملات مشترک کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۸۴۸ ۲) ۷۵۰ ۳) ۶۵۸ ۴) ۶۴۲

۲۶- در یک دنبالهٔ حسابی، $a_۱=۳+\sqrt{۲}$ و $a_۲=۵+\sqrt{۲}$ است. مجموع چهار جملهٔ چهارم این دنباله چه‌قدر از مجموع چهار جملهٔ دومش بیشتر است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۷- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۸ جملهٔ اول آن با مجموع ۱۴ جملهٔ اول آن برابر است. مجموع ۲۲ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۱۴− ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) صفر

۲۸- در دنبالهٔ حسابی ...,۱,۴,۷,۱۰، مجموع جملات چهارم، هشتم، دوازدهم، ... و شصتم کدام است؟

۱) ۱۳۸۰ ۲) ۱۳۹۰ ۳) ۱۴۰۰ ۴) ۱۴۱۰

۲۹- کدام گزینه به ترتیب جملهٔ عمومی و مجموع n جملهٔ اول، یک دنبالهٔ حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) $\{۲n^۲+n\},\{۳n-\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\{۲n^۲+۵\},\{۳n-\frac{۱}{۲}\}$ ۳) $\{۲n^۲+n\},\{۳n+\frac{۱}{n}\}$ ۴) $\{۲n^۲+۵\},\{۳n+\frac{۱}{n}\}$

۳۰- اگر $a_n=(p-۲)n^۲+(۲p-۱)n-۵$ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد، مجموع ده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۵

۳۱- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n=(۲p-۱)n^۳+qn^۲+pn+q+۱$ به‌دست می‌آید. مجموع ۵ جملهٔ دوم این دنباله کدام است؟

۱) ۸۷/۵− ۲) ۸۲/۵− ۳) ۷۷/۵− ۴) ۷۲/۵−

۳۲- در یک دنبالهٔ حسابی ۶۰ جمله‌ای، مجموع ۱۱ جملهٔ اول برابر با ۷۰ و مجموع ۱۱ جملهٔ آخر برابر ۵۱ می‌باشد. مجموع تمام جملات کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۳۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۵۱۰

۳۳- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۶۹ است و مجموع تمام جملات ۱۶۸ می‌باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۳۴- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملهٔ هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد. $(1),(3,5),(7,9,11),\ldots$ جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۱۹ ۳) ۴۲۱ ۴) ۴۲۳

۳۵- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته، مجذور کامل باشد $(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),\ldots$ مجموع جملات در دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۳۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ متوالی برابر ۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۴۵ می‌باشد. جملهٔ وسط این پنج جمله چند برابر مجذور قدرنسبت می‌باشد؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) -2 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{4}$

۳۷- اعداد $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ جملات متوالی تصاعد حسابی هستند. اگر $a_1=4$ و $a_n=169$ باشند، مجموع $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{n}{12}$ ۲) $\frac{n-1}{12}$ ۳) $\frac{n}{15}$ ۴) $\frac{n-1}{15}$

۳۸- در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ دوم ۳ برابر جملهٔ سوم می‌باشد و داریم: $a_n=a_{n+2}+9$. مجموع چهار جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

۱) -84 ۲) -82 ۳) -78 ۴) -76

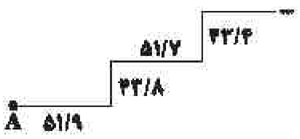
۳۹- بین دو عدد ۵ و ۵۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند و تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد ۳۶ باشد. مجموع کل اعداد قرار داده شده کدام است؟

۱) ۱۸۷ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۹۷ ۴) ۲۰۳

۴۰- در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=2n-1$، حاصل $\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\ldots+\frac{2}{a_{12}a_{13}}$ کدام است؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

۴۱- کوهنوردی از نقطهٔ A پایین کوه در مسیری به شکل مقابل در حال صعود به نوک کوه است به طوری که هر کدام از فواصل افقی را در زمان ۱/۵ دقیقه و هر کدام از فواصل عمودی را در ۱/۷۵ دقیقه طی می‌کند. فواصل افقی ۰/۲ و فواصل عمودی ۰/۴ متر در هر مرحله کاهش می‌یابد. اگر او بعد از ۶۵ دقیقه به نوک قله کوه یعنی نقطهٔ B برسد، طول AB کدام است؟



۱) $100\sqrt{133}$ ۲) $100\sqrt{152}$ ۳) $100\sqrt{154}$ ۴) $100\sqrt{164}$

دنبالهٔ هندسی و مجموع جملات آن

۴۲- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۱۲ و جملهٔ ششم ۲۴ واحد از جملهٔ اول بیشتر می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۳- دنبالهٔ هندسی $\cdots,\frac{1}{2},x,2$ غیرنزولی است. مجموع شش جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) $\frac{41}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

۴۴- در یک دنبالهٔ هندسی صعودی به‌صورت $\ldots,b,9,a,4$، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $81\frac{3}{8}$ ۲) $81\frac{7}{8}$ ۳) $82\frac{3}{8}$ ۴) $83\frac{1}{8}$

۴۵- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶ ریاضی داخل ۸۹

۴۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ده جملهٔ اول $(۱ + ۴\sqrt{۲})$ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. در این دنباله، مجموع ۸ جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ اول است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۷

۴۷- در یک دنبالهٔ هندسی نزولی با جملهٔ اول مثبت، بین جملات، رابطهٔ $\frac{a_۱a_۲a_۳}{(a_۴)^۳}=۶۴$ برقرار است. مجموع شش جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۶۳}{۶۴}$ ۲) $\frac{۶۳}{۳۲}$ ۳) $\frac{۶۳}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۶۳}{۱۶}$

۴۸- بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $۳۰(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

۴۹- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر ۳ می‌باشد. مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴ ریاضی داخل ۸۸

۵۰- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟ کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۱- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن و سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله، نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ کتاب درسی

۵۲- تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۳- جملات اول، دوم و ششم از یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۵۵ ۴) ۱۴۵

۵۴- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و هفدهم به ترتیب سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع چهار جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۰ ۳) ۸۵ ۴) ۵۶

۵۵- حاصل $A=(۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)$ به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۵۶- حاصل عبارت $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^{۹}+\ldots+t+۱}{t^{۹}+t^{۶}+t^{۳}+۱}$ به‌ازای $t=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۷- در دنبالهٔ هندسی $\sqrt{۳}, \sqrt[۴]{۲۴۳}, \cdots$ مجموع چهار جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ دوم است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱}{۸۱}$

۵۸- به‌ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲-۲$، $۲x$ و $x^۲+۴$ به ترتیب سه جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

۵۹- در خانهٔ اول شطرنج، یک عدد گندم می‌گذاریم. در خانهٔ دوم ۲ گندم، در خانهٔ سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانهٔ قبل گندم قرار می‌دهیم. اگر وزن هر دانهٔ گندم یک گرم باشد، وزن کل گندم‌ها چند گرم می‌شود؟ مقدار آن از ۱۰۰۰ میلیارد تُن بیشتر است یا کم‌تر؟ (صفحهٔ شطرنج ۶۴ خانه دارد.) کتاب درسی

۱) 8^8-1، بیشتر ۲) 8^8-1، کم‌تر ۳) $16^{16}-1$، بیشتر ۴) 16^6-1، کم‌تر

۶۰- در خانهٔ اول شطرنج یک عدد گندم، در خانهٔ دوم ۲ گندم، در خانهٔ سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانهٔ قبل گندم می‌گذاریم. اگر وزن هر دانهٔ گندم یک گرم باشد، حداقل در چند خانه، گندم قرار داده شود تا میزان کل گندم بیشتر از ۶۴ کیلوگرم باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۶

۶۱- توپی را از سطح زمین به هوا پرتاب می‌کنیم به‌طوری که تا ارتفاع ۶۴ متری بالا می‌رود و بعد از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود. در لحظه‌ای که برای دهمین بار به زمین برخورد می‌کند، این توپ چه مسافتی را برحسب متر طی کرده است؟

۱) ۱۲۷/۷۵ ۲) ۱۹۱/۷۵ ۳) ۲۵۵/۷۵ ۴) ۲۶۴/۷۵

۶۲- یک بانک به حساب سپردهٔ مشتری، سالانه ۲۰٪ سود می‌دهد. اگر شخصی دو میلیون تومان سپرده‌گذاری کند، بعد از ۵ سال مقدار موجودی حسابش تقریباً چند میلیون تومان می‌شود؟ (فرض کنید $12^5 = 250000$)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۵

۶۳- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیهٔ یک واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازهٔ محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع ۵ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$ ۲) $\frac{5\pi}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$ ۳) $5\pi\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^5\right)$ ۴) $5\pi\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$

۶۴- با توجه به دنبالهٔ حسابی، مجموع $\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{17\times20}$، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۸

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۵

۶۵- در تجزیهٔ $x^9+x^3y^3$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) x^2-y ۲) $x^4+y^2+x^2y$ ۳) x^3+y ۴) $x^4+y^2-x^2y$

۶۶- در تجزیهٔ عبارت $(x^3-x^2+3)^9+(x^3+x^2+1)^9$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) x^3+2 ۲) x^2-1 ۳) $2x^2-1$ ۴) $2x^3+2$

۶۷- حاصل عبارت $A=\frac{(x^7+1)(x-2)}{x^2-x-2}+x^5+x^3+x$ به‌ازای $x=\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۳

۶۸- در یک دنبالهٔ هندسی که نه صعودی است و نه نزولی، مجموع چهار جملهٔ اول $\frac{1}{20}$ مجموع جملات پنجم تا دوازدهم می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[4]{2}$

۶۹- سه عدد، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند به طوری‌که مجموع آن‌ها ۲۱ و مجموع معکوس آن‌ها $\frac{7}{12}$ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

یادداشت

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

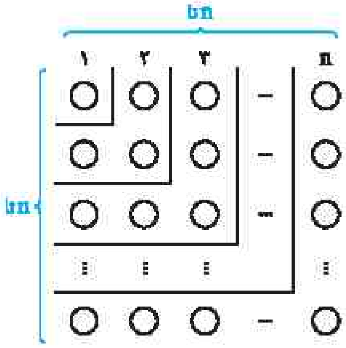
۱ | ۱ **روش اول:** مجموع $(2n-1)+\cdots+5+3+1$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $d=2$ است. بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2(1)+(n-1)2)=\frac{n}{2}(2n)=n^2$$

روش دوم: چون $a_n=2n-1$ را داریم، پس از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ نیز می‌توان استفاده کرد:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(1+(2n-1))=\frac{n}{2}(2n)=n^2$$

در این تیپ تست‌ها می‌تونی از عددگذاری هم استفاده کنی، یعنی این‌که می‌دونیم در این‌جا، مجموع یک جملهٔ اول برابر ۱ و مجموع دو جملهٔ اول برابر ۴ هست، حالا اگه توی گزینه‌ها $n=1$ و $n=2$ رو بگذاریم، تنها گزینه‌ای که جواب درست می‌ده گزینه یکه.



توجه: مطابق آن‌چه در کتاب درسی به آن اشاره شده، مجموع n جملهٔ اول اعداد فرد را از شکل روبه‌رو نیز می‌توان به‌دست آورد. بدین ترتیب که اگر در n سطر و n ستون، دایره قرار دهیم، بدیهی است که تعداد دایره‌ها برابر n^2 می‌شود. حال به‌صورتی که در شکل، مشخص است کل دایره‌ها را n قسمت می‌کنیم، طوری که در قسمت اول ۱ دایره، در قسمت دوم ۳ دایره، در قسمت سوم ۵ دایره و به همین صورت در قسمت nام، $2n-1$ دایره وجود دارد. می‌دانیم مجموع تعداد آن‌ها باید برابر n^2 باشد، پس:

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

۲ | ۱ نقطهٔ اول را به هریک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطهٔ دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطهٔ اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطهٔ سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم تا ۱۷ وتر حاصل شود. با ادامهٔ این عمل، تعداد وترهای حاصل برابر $1+2+\cdots+17+18+19$ می‌شود. می‌دانیم $1+2+\cdots+n$، مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد که بعد از ساده کردن به رابطهٔ $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$1+2+\cdots+17+18+19=\frac{19(19+1)}{2}=190$$

۳ | ۳ با توجه به سؤال $a_1=1$ و $a_4=\frac{5}{2}$ است. بنابراین:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_4=1+3d=\frac{5}{2}\Rightarrow 3d=\frac{3}{2}\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_{15}=\frac{15}{2}\left(2+14\left(\frac{1}{2}\right)\right)=67/5$$

۴ | ۱ **روش اول:**

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_{19}=a_1+18d=10\quad(*)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_{37}=\frac{37}{2}(2a_1+36d)=\frac{37}{2}(2(a_1+18d))=37(a_1+18d)\xrightarrow{\text{رابطهٔ }(*)}37(10)=370$$

روش دوم: از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ استفاده می‌کنیم:

$$S_{37}=\frac{37}{2}(a_1+a_{37})\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}\frac{37}{2}(2a_{19})=37a_{19}=37(10)=370$$

۵ | ۴

$$a_7=\frac{1}{2}a_3\Rightarrow 2a_7=a_3\Rightarrow 2(a_1+6d)=a_1+2d\Rightarrow 2a_1+12d=a_1+2d\Rightarrow a_1=-10d$$

$$S_n=0\Rightarrow\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=0\xrightarrow{a_1=-10d}\frac{n}{2}(-20d+(n-1)d)=0\Rightarrow\frac{n}{2}(d(-20+n-1))=0$$

$$\Rightarrow\frac{nd}{2}(n-21)=0\xrightarrow{nd\neq 0}n-21=0\Rightarrow n=21$$

۶ | ۲ **روش اول:** با توجه به این‌که $S_1=a_1$ و $S_2=a_1+a_2$ است، داریم:

$$\begin{cases}S_1=4+3=7\Rightarrow a_1=7\quad(*)\\ S_2=4(2)^2+3(2)=22\Rightarrow a_1+a_2=22\xrightarrow{(*)}7+a_2=22\Rightarrow a_2=15\end{cases}\Rightarrow d=a_2-a_1=15-7=8$$

جملهٔ عمومی: $a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=7+(n-1)(8)=8n-1$

توجه: *برای تعیین d می‌تونستی از این نکته استفاده کنی که ضریب n^2 برابر نصف قدرنسبته، پس $\frac{d}{2}=4$ و در نتیجه $d=8$ می‌شه.*

روش دوم: از رابطهٔ $a_n=S_n-S_{n-1}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+3n-(4(n-1)^2+3(n-1))=4n^2+3n-(4n^2-8n+4+3n-3)=8n-1$$

۷ ۴ ابتدا با تشکیل $a_۴$ و $a_{۱۶}$ و محاسبهٔ تفاضل آن‌ها مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس $S_{۱۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow \begin{cases} a_۴=a_۱+۳d \\ a_{۱۶}=a_۱+۱۵d \end{cases} \Rightarrow a_{۱۶}-a_۴=(a_۱+۱۵d)-(a_۱+۳d)=۱۲d$$

$$\Rightarrow ۱۷-۱=۱۲d \Rightarrow ۱۶=۱۲d \Rightarrow d=\frac{۴}{۳}$$

$$a_۴=a_۱+۳d=۱ \xrightarrow{d=\frac{۴}{۳}} a_۱+۳(\frac{۴}{۳})=۱ \Rightarrow a_۱+۴=۱ \Rightarrow a_۱=-۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}\left(۲(-۳)+۱۲(\frac{۴}{۳})\right)=\frac{۱۳}{۲}(-۶+۱۶)=\frac{۱۳}{۲}(۱۰)=۱۳\times۵=۶۵$$

البته می‌توان در قسمت اول راه‌حل از رابطهٔ $a_m-a_n=(m-n)d$ $(a_{۱۶}-a_۴=۱۲d)$ نیز استفاده کرد.

۸ ۱ چون -۲۱ , $-۲۷, x$ ، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی هستند، داریم:

$$۲x=(-۲۷)+(-۲۱) \Rightarrow ۲x=-۴۸ \Rightarrow x=-۲۴$$

پس جملات دنبالهٔ حسابی به‌صورت $\cdots,-۲۱,-۲۴,-۲۷$ در می‌آیند و در نتیجه $a_۱=-۲۷$ و $d=-۲۴-(-۲۷)=۳$ می‌شود. حال جملهٔ عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_n=-۲۷+(n-۱)(۳)=۳n-۳۰$$

برای یافتن تعداد جملات منفی، نامعادلهٔ $a_n<۰$ را حل می‌کنیم:

$$۳n-۳۰<۰ \Rightarrow ۳n<۳۰ \Rightarrow n<۱۰ \Rightarrow n\le ۹ \Rightarrow$$ ۹ جملهٔ منفی وجود دارد.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_۹=\frac{۹}{۲}(۲(-۲۷)+۸(۳))=\frac{۹}{۲}(-۵۴+۲۴)=\frac{۹}{۲}(-۳۰)=۹(-۱۵)=-۱۳۵$$

۹ ۲

$$۵,۸,۱۱,\cdots \Rightarrow a_۱=۵\ ,\ d=a_۲-a_۱=۸-۵=۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۲(۵)+(n-۱)۳)=\frac{n}{۲}(۱۰+۳n-۳)=\frac{n}{۲}(۳n+۷)$$

برای این‌که $S_n>۵۰۰$ شود، به‌جای حل نامعادلهٔ $\frac{n}{۲}(۳n+۷)>۵۰۰$ که وقت‌گیر است، بهتر است از اعداد گزینه‌ها استفاده کنیم:

$$n=۱۷ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n+۷)=\frac{۱۷}{۲}(۵۸)=۴۹۳<۵۰۰$$

$$n=۱۸ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n+۷)=\frac{۱۸}{۲}(۶۱)=۵۴۹>۵۰۰$$

بنابراین اگر حداقل ۱۸ جمله را با هم جمع کنیم، حاصل بیشتر از ۵۰۰ می‌شود.

۱۰ ۱ چون ۲۰ واسطه درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل ۲۲ جمله دارد که جملهٔ اول برابر -۱۳ و جملهٔ بیست‌ودوم برابر ۷۱ است. برای پیدا کردن مجموع ۲۰ واسطهٔ حسابی، ابتدا مجموع کل اعداد را حساب کرده و حاصل را منهای اعداد -۱۳ و ۷۱ می‌کنیم:

$$\underbrace{-۱۳}_{a_۱},\underbrace{O,O,\cdots,O}_{\text{۲۰ جمله}},\underbrace{۷۱}_{a_{۲۲}}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(a_۱+a_{۲۲})=۱۱(-۱۳+۷۱)=۱۱(۵۸)=۶۳۸$$

مجموع ۲۰ واسطه $=۶۳۸-(-۱۳+۷۱)=۶۳۸-۵۸=۵۸۰$

حال برای تعیین قدرنسبت، کافی است $a_{۲۲}$ را تشکیل دهیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_{۲۲}=a_۱+۲۱d \Rightarrow ۷۱=-۱۳+۲۱d \Rightarrow ۸۴=۲۱d \Rightarrow d=۴$$

تذکر: برای این‌که مجموع بیست واسطه‌رو حساب کنی، این‌طوری هم می‌شه:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۲+a_{۲۱})=۱۰(a_۱+a_{۲۲})=۱۰(-۱۳+۷۱)=۱۰(۵۸)=۵۸۰$$

۱۱ ۲ با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ داریم:

$$S_{۲۰}=\frac{\cancel{۲۰}^{۱۰}}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۹d)=۲۰a_۱+۱۹۰d\ ;\ S_{۱۲}=\frac{\cancel{۱۲}^{۶}}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۱d)=۱۲a_۱+۶۶d$$

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲} \Rightarrow ۲۰a_۱+۱۹۰d=۳۶a_۱+۱۹۸d \Rightarrow -۸d=۱۶a_۱ \Rightarrow d=-۲a_۱$$

از طرفی جملهٔ سوم برابر ۶ می‌باشد، پس $a_۱+۲d=۶$ ، در نتیجه داریم:

$$a_۱+۲d=۶ \xrightarrow{d=-۲a_۱} a_۱-۴a_۱=۶ \Rightarrow -۳a_۱=۶ \Rightarrow a_۱=-۲ \xrightarrow{d=-۲a_۱} d=۴$$

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=-۲+۹(۴)=-۲+۳۶=۳۴$$

۱۲ **۴** مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$S_{۲۰}=\frac{\cancel{۲۰}^{۱۰}}{\cancel{۲}}(۲a+۱۹d)=۲۰a+۱۹۰d \quad (*)$$

حال مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله با جملهٔ اول a و قدرنسبت d+۱ را حساب می‌کنیم:

$$S'_{۲۰}=\frac{\cancel{۲۰}^{۱۰}}{\cancel{۲}}(۲a+۱۹(d+۱))=۲۰a+۱۹۰(d+۱)=(۲۰a+۱۹۰d)+۱۹۰\overset{(*)}{=\!=}S_{۲۰}+۱۹۰$$

بنابراین اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به مجموع ۲۰ جملهٔ اول، ۱۹۰ واحد افزوده خواهد شد.

۱۳ **۳** **روش اول:** اولین عدد طبیعی فرد مضرب ۳ برابر خود عدد ۳ و آخرین آن که کوچک‌تر از ۱۰۱ باشد، عدد ۹۹ است. بنابراین اعداد فرد مضرب ۳ کوچک‌تر از ۱۰۱ به صورت ۳,۹,۱۵,...,۹۹ هستند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۶ را تشکیل می‌دهند. ابتدا تعداد جملات این دنباله و سپس مجموع آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۹۹=۳+(n-۱)(۶)\Rightarrow ۹۶=۶n-۶\Rightarrow ۶n=۱۰۲\Rightarrow n=۱۷$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹)=\frac{۱۷}{۲}(۱۰۲)=۱۷\times ۵۱=۸۶۷$$

روش دوم: با توجه به صورت سؤال این اعداد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ و جملهٔ اول ۳ می‌دهند. ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۳+(n-۱)(۶)\Rightarrow a_n=۶n-۳$$

با حل نامعادلهٔ $a_n<۱۰۱$ تعداد جملات فرد مضرب ۳، کم‌تر از ۱۰۱ به‌دست می‌آید:

$$۶n-۳<۱۰۱\Rightarrow ۶n<۱۰۴\Rightarrow n<\frac{۱۰۴}{۶}=\frac{۵۲}{۳}\simeq ۱۷/۳\Rightarrow n\le ۱۷$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۲(۳)+۱۶(۶))=\frac{۱۷}{۲}(۶+۹۶)=\frac{۱۷}{۲}(۱۰۲)=۸۶۷$$

۱۴ **۲** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مضرب ۷ به ترتیب ۱۴ = ۷ × ۲ و ۹۸ = ۷ × ۱۴ است. اعداد دو رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱۴ و قدرنسبت ۷ می‌دهند که با نوشتن جملهٔ عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$۱۴,۲۱,\dots,۹۸$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۹۸=۱۴+(n-۱)(۷)\Rightarrow ۸۴=۷(n-۱)\Rightarrow n-۱=۱۲\Rightarrow n=۱۳$$

پس این دنباله، ۱۳ جمله دارد، حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۱۳(۷+۴۹)=۷۲۸$$

تذکر: برای تعیین تعداد جملات، چون دنباله به صورت ۷ × ۱۴ , ... , ۷ × ۳ , ۷ × ۲ است، پس می‌توان گفت $n=۱۴-۲+۱=۱۳$.

۱۵ **۴** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۷ به‌ترتیب برابر ۱۰۵ = ۷ × ۱۵ و ۹۹۴ = ۷ × ۱۴۲ است. بنابراین تعداد جملات دنباله برابر ۱۲۸ = ۱ + ۱۵ − ۱۴۲ می‌باشد. اعداد سه رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۷ می‌دهند که مجموع جملات آن را حساب می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۲۸}=\frac{۱۲۸}{۲}(۱۰۵+۹۹۴)=۶۴(۱۰۹۹)=۷۰۳۳۶$$

به جای این‌که ۶۴ رو در ۱۰۹۹ ضرب کنی می‌تونی بگی یکان عدد حاصل برابر ۶ می‌شه، پس گزینهٔ (۴) درسته.

۱۶ **۳** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر عدد ۴ برابر ۲ است، برابر ۲۲ و ۱۹۸ می‌باشد. پس اعداد مورد نظر، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲۲ و قدرنسبت ۴ می‌دهند که با نوشتن جملهٔ عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$۲۲,۲۶,\dots,۱۹۸$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۱۹۸=۲۲+(n-۱)(۴)\Rightarrow ۱۷۶=۴(n-۱)\Rightarrow n-۱=۴۴\Rightarrow n=۴۵$$

بنابراین این دنباله ۴۵ جمله دارد، حال مجموع این اعداد را حساب می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۴۵}=\frac{۴۵}{۲}(۲۲+۱۹۸)=\frac{۴۵}{۲}(۲۲۰)=۴۵(۱۱۰)=۴۹۵۰$$

۱۷ **۳** دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد، باید مسافت ۶ = (۳)۲ متر را طی کند، برای توپ دوم باید ۱۲ = (۳ + ۳)۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ = (۳ + ۳ + ۳)۲ متر و ... بنابراین مسافت‌های طی‌شده در هر مرحله، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهند. اگر n، تعداد توپ‌های انداخته‌شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی، داریم:

$$۶,۱۲,۱۸,\dots$$

$$S=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow ۹۱۸=\frac{n}{۲}(۱۲+(n-۱)۶)\Rightarrow ۹۱۸=\frac{n}{۲}(۶n+۶)\Rightarrow ۹۱۸=۳n(n+۱)\Rightarrow ۳۰۶=n(n+۱)$$

برای حل معادلهٔ $n(n+۱)=۳۰۶$ به جای استفاده از دلتا بهتر است، بگوییم ضرب دو عدد طبیعی متوالی ۳۰۶ شده و چون ۱۸ × ۱۷ = ۳۰۶، پس $n=۱۷$ می‌باشد.

۱۸ | ۴ چون رابطهٔ S_n را داریم، برای محاسبهٔ $a_7+a_8+\cdots+a_{18}$ کافی است، مجموع هجده جملهٔ اول را منهای مجموع شش جملهٔ اول کنیم:

$$S_n=\frac{n(n-15)}{6}\Rightarrow S_{18}=\frac{18(18-15)}{6}=9 \;;\; S_6=\frac{6(6-15)}{6}=-9$$

$$a_7+a_8+\dots+a_{18}=\underbrace{S_{18}}_{a_1+a_2+\dots+a_{18}}-\overbrace{S_6}^{a_1+a_2+\dots+a_6}=9-(-9)=18$$

نتیجه: با در اختیار داشتن S_n، برای تعیین مجموع جملات mاُم تا nاُم $(n>m)$ داریم:

$$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n=S_n-S_{m-1}$$

۱۹ | ۲ چون a_n یک عبارت درجهٔ اول برحسب n می‌باشد، پس این دنباله، حسابی است. (با نوشتن چند جملهٔ اول دنباله هم می‌توان فهمید که دنبالهٔ حسابی است.)

روش اول: می‌خواهیم مجموع جملات $a_{10},a_{11},\cdots,a_{29},a_{30}$ را تعیین کنیم، این دنباله ۲۱ جمله دارد (زیرا $21=1+(30-10)$). حال با توجه به این‌که $a_n=\frac{n}{2}-1$، پس $a_{10}=\frac{10}{2}-1=4$ و $a_{30}=\frac{30}{2}-1=14$، بنابراین داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(\text{جملهٔ اول}+\text{جملهٔ آخر})\Rightarrow S_{21}=\frac{21}{2}(4+14)=\frac{21}{2}(18)=21\times 9=189$$

روش دوم:

$$a_n=\frac{n}{2}-1\Rightarrow\begin{cases}a_1=-\frac{1}{2}\\ a_2=0\end{cases}\Rightarrow d=a_2-a_1=\frac{1}{2}$$

مجموع جملات با شروع از جملهٔ دهم و ختم به جملهٔ سی‌اُم، برابر است با $S_{30}-S_9$، بنابراین:

$$S_{30}-S_9=\frac{30}{2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+29\left(\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{9}{2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+8\left(\frac{1}{2}\right)\right)=15\left(-1+\frac{29}{2}\right)-\frac{9}{2}(-1+4)=15\left(\frac{27}{2}\right)-\frac{9}{2}(3)=\frac{405}{2}-\frac{27}{2}=189$$

۲۰ | ۲ مجموع ۴ جملهٔ اول، برابر ۱۵ $(S_4=15)$ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی برابر ۳۰ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع ۹ جملهٔ اول آن برابر $30+15=45$ می‌باشد $(S_9=45)$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}S_4=15\Rightarrow \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}(2a_1+3d)=15\Rightarrow 2a_1+3d=\frac{15}{2}\\ S_9=45\Rightarrow \frac{\cancel{9}}{2}(2a_1+8d)=\cancel{45}^{\,5}\Rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1+4d))=5\Rightarrow a_1+4d=5\end{cases}\Rightarrow a_1=3\;,\;d=\frac{1}{2}$$

جملهٔ یازدهم: $a_{11}=a_1+10d=3+10\left(\frac{1}{2}\right)=3+5=8$

۲۱ | ۳ مجموع پنج جملهٔ اول S_5 و مجموع پنج جملهٔ بعدی $S_{10}-S_5$ است. بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5)\xrightarrow{\times 3}3S_5=S_{10}-S_5\Rightarrow 4S_5=S_{10}\Rightarrow \cancel{4}^{\,2}\times\frac{5}{\cancel{2}}(2a_1+4d)=\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{2}}(2a_1+9d)\Rightarrow \cancel{10}^{\,2}(2a_1+4d)=\cancel{5}(2a_1+9d)$$

$$\Rightarrow 4a_1+8d=2a_1+9d\Rightarrow d=2a_1\Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}\overset{d=2a_1}{=\!=}\frac{a_1+2a_1}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

۲۲ | ۲ چون دنباله، ۴۱ جمله دارد، پس جملهٔ وسط، جملهٔ ۲۱اُم است (زیرا $21=\frac{41+1}{2}$). بنابراین:

مجموع پنج جملهٔ وسط: $a_{19}+a_{20}+a_{21}+a_{22}+a_{23}=20\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}5a_{21}=20\Rightarrow a_{21}=4$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow S_{41}=\frac{41}{2}(a_1+a_{41})\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}\frac{41}{2}(2a_{21})=41(a_{21})=41(4)=164$$

برای تعیین مجموع جملات از نکتهٔ زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

> **نکته:** اگر در یک دنبالهٔ حسابی تعداد جملات فرد باشد، مجموع جملات آن برابر است با تعداد جملات ضرب در جملهٔ وسط.

بنابراین در این تست می‌توان نوشت:

$$S_{41}=41(a_{21})=41(4)=164$$

۲۳ | ۱ می‌دانیم $S_{10}=a_1+a_2+\dots+a_{10}$ و $S_7=a_1+a_2+\cdots+a_7$، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_{10}-S_7=a_8+a_9+a_{10}=6\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}3a_9=6\Rightarrow a_9=2$$

$$a_6+a_7+\dots+a_{12}=(a_6+a_{12})+(a_7+a_{11})+(a_8+a_{10})+a_9=2a_9+2a_9+2a_9+a_9=7a_9=7(2)=14$$

۲۴ ۱ مجموع جملات زوج و فرد را نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} a_۲+a_۴+a_۶+\dots+a_{۲۰}=۱۵۰ \\ -\ a_۱+a_۳+a_۵+\dots+a_{۱۹}=۱۳۵ \\ \hline \end{array}$$

$$(a_۲-a_۱)+(a_۴-a_۳)+(a_۶-a_۵)+\dots+(a_{۲۰}-a_{۱۹})=۱۵ \Rightarrow \overbrace{d+d+\dots+d}^{۱۰\ \text{تا}}=۱۵ \Rightarrow ۱۰d=۱۵ \Rightarrow d=۱/۵$$

می‌دانیم $S_{۲۰}=۱۵۰+۱۳۵=۲۸۵$، بنابراین:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=۲۸۵ \xrightarrow{d=۱/۵} ۱۰(۲a_۱+۱۹\times ۱/۵)=۲۸۵ \Rightarrow ۲۸۵=۲۰a_۱+۲۸۵ \Rightarrow a_۱=۰$$

۲۵ ۱

> **نکته:** اگر دو دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت‌های $d_۱$ و $d_۲$ دارای جملات مشترک باشند، این جملات مشترک، با یک‌دیگر تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبتی برابر ک.م.م $d_۱$ و $d_۲$ خواهند داد.

$$\begin{cases} ۲,۴,۶,\downarrow ۸,۱۰,۱۲,\downarrow ۱۴,\dots \Rightarrow \text{قدرنسبت}=۲ \\ ۵,\downarrow ۸,۱۱,\downarrow ۱۴,۱۷,\dots \Rightarrow \text{قدرنسبت}=۳ \end{cases}$$

دنبالهٔ جملات مشترک به صورت $۸,۱۴,۲۰,\dots$ می‌باشد که جملهٔ اول آن برابر ۸ و قدرنسبت آن برابر ۶ است (ک.م.م اعداد ۲ و ۳ برابر عدد ۶ می‌باشد).

حال تعداد جملات کم‌تر از ۱۰۰ این دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_۱=۸, d=۶\ ;\ a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_n=۸+(n-۱)۶ \Rightarrow a_n=۶n+۲$$

$$۶n+۲<۱۰۰ \Rightarrow ۶n<۹۸ \Rightarrow n<\frac{۹۸}{۶}\simeq ۱۶/۳ \Rightarrow n=۱,۲,\dots,۱۶$$

این دنباله ۱۶ جمله دارد، بنابراین داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۶}=\frac{۱۶}{۲}(۲\times ۸+۱۵\times ۶)=۸(۱۶+۹۰)=۸\times ۱۰۶=۸۴۸$$

۲۶ ۲

$$\overbrace{a_۱,\dots,a_۴}^{\text{۴ جملهٔ اول}} \quad \overbrace{a_۵,\dots,a_۸}^{\text{۴ جملهٔ دوم}} \quad \overbrace{a_۹,\dots,a_{۱۲}}^{\text{۴ جملهٔ سوم}} \quad \overbrace{a_{۱۳},\dots,a_{۱۶}}^{\text{۴ جملهٔ چهارم}}$$

مجموع چهار جملهٔ چهارم را منهای مجموع چهار جملهٔ دوم می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ $a_m-a_n=(m-n)d$ داریم:

$$\begin{array}{l} a_{۱۳}+a_{۱۴}+a_{۱۵}+a_{۱۶} \\ -\ a_۵+a_۶+a_۷+a_۸ \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{۱۳}-a_۵)+(a_{۱۴}-a_۶)+(a_{۱۵}-a_۷)+(a_{۱۶}-a_۸)=۸d+۸d+۸d+۸d=۳۲d$$

$$d=a_۲-a_۱=(۵+\sqrt{۲})-(۳+\sqrt{۲})=۲ \Rightarrow ۳۲d=۶۴$$

اگه رابطهٔ $a_m-a_n=(m-n)d$ رو یادت نبود، کافیه جملهٔ عمومی هر کدوم رو بنویسی و از هم کم کنی. مثلاً $a_{۱۳}-a_۵=(a_۱+۱۲d)-(a_۱+۴d)=۸d$.

۲۷ ۴ با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$ داریم:

$$S_۸=S_{۱۴} \Rightarrow \frac{\cancel{۸}^{۴}}{\cancel{۲}}(۲a+۷d)=\frac{\cancel{۱۴}^{۷}}{\cancel{۲}}(۲a+۱۳d) \Rightarrow ۸a+۲۸d=۱۴a+۹۱d \Rightarrow ۶a+۶۳d=۰$$

$$\Rightarrow ۳(۲a+۲۱d)=۰ \Rightarrow ۲a+۲۱d=۰ \qquad (*)$$

$$S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(۲a+۲۱d) \xRightarrow{(*)} S_{۲۲}=۱۱\times ۰=۰$$

> **تذکر:** به طور کلی می‌توان گفت در هر دنبالهٔ حسابی، اگر $S_m=S_n\ (m\neq n)$ باشد، آن‌گاه S_{m+n} برابر صفر است. اثبات این موضوع را در تست‌های یک گام فراتر خواهید دید.

۲۸ ۴ دنبالهٔ $۱,۴,۷,۱۰,\dots$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=۳$ می‌باشد، پس:

$$a_۸=a_۱+۷d=۱+۲۱=۲۲\ ,\ a_{۶۰}=a_۱+۵۹d=۱+۵۹(۳)=۱۷۸$$

بنابراین جملات $a_۴,a_۸,a_{۱۲},\dots,a_{۶۰}$ به‌صورت $۱۰,۲۲,\dots,۱۷۸$ درمی‌آیند که خود یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۲ را تشکیل می‌دهند.

در نتیجه داریم:

$$۱۷۸=۱۰+(n-۱)(۱۲) \Rightarrow ۱۲(n-۱)=۱۶۸ \Rightarrow ۱۲n=۱۸۰ \Rightarrow n=۱۵$$

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}\big(۲(۱۰)+(۱۵-۱)(۱۲)\big)=\frac{۱۵}{۲}(۱۸۸)=۱۵\times ۹۴=۱۴۱۰$$

برای تعیین قدرنسبت دنبالهٔ جدید از نکتهٔ زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

> **نکته:** اگر در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ با قدرنسبت d، جملات آن را با فاصلهٔ k از هم انتخاب کنیم، جملات حاصل، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی جدید با قدرنسبت kd می‌دهند.

در این تست چون جملات چهارم، هشتم، دوازدهم و ... با فاصلهٔ ۴ تا از هم هستند، پس قدرنسبت برابر $۴\times ۳=۱۲$ است.

۲۹ **۱** با توجه به مطالب درسنامه، a_n باید یک عبارت درجه اول برحسب n و S_n یک عبارت درجه دوم بدون عدد ثابت باشد که فقط گزینهٔ (۱) این شرایط را دارد.

۳۰ **۳** با توجه به مطالب درسنامه می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی، عبارتی درجه اول برحسب n است و ضریب n برابر قدرنسبت می‌باشد.

پس برای این‌که a_n عبارت درجه دوم نباشد، باید ضریب $n^۲$ را صفر بگیریم:

$$p-۲=۰\Rightarrow p=۲\Rightarrow a_n=۳n-۵\Rightarrow d=۳,\ a_۱=-۲$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(-۲)+۹(۳))=۵(-۴+۲۷)=۱۱۵$$

۳۱ **۴** می‌دانیم زمانی $S_n=(۲p-۱)n^۳+qn^۲+pn+q+۱$ می‌تواند مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد که جملهٔ درجه سوم و جملهٔ مستقل از n نداشته باشد. بنابراین:

$$۲p-۱=۰\Rightarrow p=\frac{۱}{۲},\ q+۱=۰\Rightarrow q=-۱\Rightarrow S_n=-n^۲+\frac{n}{۲}$$

$$\text{مجموع ۵ جملهٔ دوم}=S_{۱۰}-S_۵=(-۱۰۰+۵)-\left(-۲۵+\frac{۵}{۲}\right)=-۷۲/۵$$

۳۲ **۲**

$$a_۱+a_۲+\dots+a_{۱۰}+a_{۱۱}=۷۰\ ;\quad a_{۶۰}+a_{۵۹}+\dots+a_{۵۱}+a_{۵۰}=۵۱$$

ابتدا دو رابطهٔ بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_۱+a_{۶۰})+(a_۲+a_{۵۹})+\dots+(a_{۱۰}+a_{۵۱})+(a_{۱۱}+a_{۵۰})=۱۲۱\quad (*)$$

طبق رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$a_۱+a_{۶۰}=a_۲+a_{۵۹}=\dots=a_{۱۱}+a_{۵۰}\xRightarrow{(*)}۱۱(a_۱+a_{۶۰})=۱۲۱\Rightarrow a_۱+a_{۶۰}=۱۱$$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی به فرم $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ می‌باشد، بنابراین:

$$\text{مجموع تمام جملات}:\ S_{۶۰}=\frac{۶۰}{۲}(a_۱+a_{۶۰})=۳۰\times۱۱=۳۳۰$$

۳۳ **۲** فرض می‌کنیم دنباله، n جمله دارد. بنابراین با جمع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر داریم:

$$\begin{cases}a_۱+a_۲+a_۳=۱۵\\ a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}=۶۹\end{cases}\Rightarrow(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})=۸۴$$

با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها $a_۱+a_n=a_۲+a_{n-۱}=a_۳+a_{n-۲}$ است، بنابراین:

$$۳(a_۱+a_n)=۸۴\Rightarrow a_۱+a_n=۲۸$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow ۱۶۸=\frac{n}{۲}(۲۸)\Rightarrow ۱۶۸=۱۴n\Rightarrow n=۱۲$$

۳۴ **۲** در دستهٔ اول، یک عدد فرد، در دستهٔ دوم، دو عدد فرد، در دستهٔ سوم، سه عدد فرد و به همین ترتیب در دستهٔ بیستم، بیست عدد فرد وجود دارد. ابتدا تعداد کل جملات را از دستهٔ اول تا دستهٔ بیستم تعیین می‌کنیم:

$$۱+۲+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}\Rightarrow ۱+۲+\dots+۲۰=\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$$

بنابراین آخرین جملهٔ دستهٔ بیستم، ۲۱۰اُمین جملهٔ دنبالهٔ اعداد فرد می‌باشد:

$$۱,۳,۵,۷,\dots$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\xRightarrow[d=۲]{a_۱=۱}a_{۲۱۰}=۱+۲۰۹\times۲=۴۱۹$$

۳۵ **۳** با توجه به فرض سوال، جملهٔ آخر دستهٔ nاُم برابر $n^۲$ است. پس آخرین عدد دستهٔ نهم و دهم به‌ترتیب ۸۱ و ۱۰۰ هستند و در نتیجه دستهٔ دهم به‌صورت $(۸۲,۸۳,\cdots,۱۰۰)$ خواهد بود، بنابراین دنبالهٔ دستهٔ دهم، ۱۹ جمله دارد (زیرا $۱۹=۱+(۱۰۰-۸۲)$) که $S_{۱۹}$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۸۲+۱۰۰)=۱۷۲۹$$

۳۶ **۴** ۵ جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-۲d,a-d,a,a+d,a+۲d$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵a=۵\Rightarrow a=۱\Rightarrow \text{جملهٔ وسط}=۱$$

$$\text{مجموع مربعات ۵ جمله}=(۱-۲d)^۲+(۱-d)^۲+۱^۲+(۱+d)^۲+(۱+۲d)^۲=۴۵$$

$$\Rightarrow ۱+۴d^۲-۴d+۱+d^۲-۲d+۱+۱+d^۲+۲d+۱+۴d^۲+۴d=۴۵\Rightarrow ۵+۱۰d^۲=۴۵\Rightarrow d^۲=۴$$

جملهٔ وسط برابر ۱ و $d^۲=۴$ است، بنابراین جملهٔ وسط، $\frac{۱}{۴}$ مجذور قدرنسبت می‌باشد.

۳۷ **۴** هریک از کسرها را گویا می‌کنیم. تفاضل جملات متوالی برابر قدرنسبت d است:

$$\frac{\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱}}{\underbrace{a_۲-a_۱}_{d}}+\frac{\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲}}{\underbrace{a_۳-a_۲}_{d}}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}}}{\underbrace{a_n-a_{n-۱}}_{d}}=\frac{\cancel{\sqrt{a_۲}}-\sqrt{a_۱}+\cancel{\sqrt{a_۳}}-\cancel{\sqrt{a_۲}}+\cdots+\sqrt{a_n}-\cancel{\sqrt{a_{n-۱}}}}{d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_۱}}{d}=\frac{a_n-a_۱}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱})}=\frac{a_۱+(n-۱)d-a_۱}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱})}=\frac{n-۱}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱}}=\frac{n-۱}{\sqrt{۱۶۹}+\sqrt{۴}}=\frac{n-۱}{۱۵}$$

۳۸ | ۱

$$a_n = a_{n+۳} + ۹ \Rightarrow a_۱ + (n-۱)d = a_۱ + (n+۲)d + ۹ \Rightarrow ۳d = -۹ \Rightarrow d = -۳$$

$$a_۲ = ۳a_۳ \Rightarrow a_۱ + d = ۳(a_۱ + ۲d) \xrightarrow{d=-۳} a_۱ - ۳ = ۳a_۱ - ۱۸ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱۵}{۲}$$

برای تعیین مجموع چهار جملهٔ سوم، دو روش وجود دارد:

روش اول:

$$\text{مجموع ۴ جملهٔ سوم} = a_۹ + a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} = a_۱ + ۸d + a_۱ + ۹d + a_۱ + ۱۰d + a_۱ + ۱۱d = ۴a_۱ + ۳۸d = ۳۰ - ۱۱۴ = -۸۴$$

روش دوم:

$$\text{مجموع ۴ جملهٔ سوم} = S_{۱۲} - S_۸ = \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱ + ۱۱d) - \frac{۸}{۲}(۲a_۱ + ۷d) = ۶(۱۵ - ۳۳) - ۴(۱۵ - ۲۱) = -۸۴$$

۳۹ | ۴ با فرض $a_۱ = ۵$ و $a_n = ۵۳$ داریم:

$$۵, a_۲, \dots, a_{n-۱}, ۵۳ \Rightarrow a_{n-۱} - a_۲ = ۳۶ \Rightarrow a_۱ + (n-۲)d - (a_۱ + d) = ۳۶ \Rightarrow (n-۳)d = ۳۶ \quad (۱)$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۵۳ = ۵ + (n-۱)d \Rightarrow (n-۱)d = ۴۸ \quad (۲)$$

از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲)، تعداد جملات و قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n-۳)d}{(n-۱)d} = \frac{۳۶}{۴۸} \Rightarrow \frac{n-۳}{n-۱} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴n - ۱۲ = ۳n - ۳ \Rightarrow n = ۹ \xrightarrow{(n-۳)d=۳۶} d = ۶$$

بنابراین واسطه‌های عددی به‌صورت ۱۱,۱۷,...,۴۷ می‌باشند که شامل ۷ جمله هستند. در نتیجه:

$$S_۷ = \frac{۷}{۲}(۱۱ + ۴۷) = ۷ \times ۲۹ = ۲۰۳$$

۴۰ | ۳ در دنبالهٔ $a_n = ۲n - ۱$، جملهٔ اول برابر ۱ و جملهٔ دوم برابر ۳ است، پس قدرنسبت دنباله ۲ می‌شود. از طرفی می‌دانیم اگر هر جمله را از جملهٔ بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{۲}{a_۱a_۲} + \frac{۲}{a_۲a_۳} + \frac{۲}{a_۳a_۴} + \dots + \frac{۲}{a_{۱۲}a_{۱۳}} = \frac{d}{a_۱a_۲} + \frac{d}{a_۲a_۳} + \frac{d}{a_۳a_۴} + \dots + \frac{d}{a_{۱۲}a_{۱۳}}$$

$$= \frac{a_۲ - a_۱}{a_۱a_۲} + \frac{a_۳ - a_۲}{a_۲a_۳} + \frac{a_۴ - a_۳}{a_۳a_۴} + \dots + \frac{a_{۱۳} - a_{۱۲}}{a_{۱۲}a_{۱۳}} = \frac{۱}{a_۱} - \cancel{\frac{۱}{a_۲}} + \cancel{\frac{۱}{a_۲}} - \cancel{\frac{۱}{a_۳}} + \cancel{\frac{۱}{a_۳}} - \cancel{\frac{۱}{a_۴}} + \dots + \cancel{\frac{۱}{a_{۱۲}}} - \frac{۱}{a_{۱۳}}$$

$$= \frac{۱}{a_۱} - \frac{۱}{a_{۱۳}} = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲(۱۳) - ۱} = ۱ - \frac{۱}{۲۵} = ۱ - \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۹۶$$

۴۱ | ۴ دو مرحله که شامل یک حرکت افقی و یک حرکت عمودی است ۳/۲۵ دقیقه $(۱/۵ + ۱/۷۵ = ۳/۲۵)$ طول می‌کشد. پس اگر n تعداد مرحله‌ها باشد $n = \frac{۶۵}{۳/۲۵} = ۲۰$ می‌شود. یعنی کوهنورد بعد از ۲۰ مرحله حرکت افقی و عمودی به قله می‌رسد. حال اگر $S_۱$ و $S_۲$ به ترتیب مجموع فواصل افقی و عمودی باشد، با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$ داریم:

$$S_۱ = \frac{۲۰}{۲}(۲(۵۱/۹) + ۱۹(-۰/۲)) = ۱۰(۱۰۳/۸ - ۳/۸) = ۱۰(۱۰۰) = ۱۰۰۰$$

$$S_۲ = \frac{۲۰}{۲}(۲(۴۳/۸) + ۱۹(-۰/۴)) = ۱۰(۸۷/۶ - ۷/۶) = ۱۰(۸۰) = ۸۰۰$$

$$AB = \sqrt{S_۱^۲ + S_۲^۲} = \sqrt{(۱۰۰۰)^۲ + (۸۰۰)^۲} = \sqrt{۱۰۰۰۰۰۰ + ۶۴۰۰۰۰} = \sqrt{۱۶۴۰۰۰۰} = \sqrt{۱۶۴ \times ۱۰^۴} = ۱۰۰\sqrt{۱۶۴}$$

۴۲ | ۲ می‌دانیم $a_۶ - a_۱ = ۲۴$ است، پس با توجه به $a_n = a_۱q^{n-۱}$ داریم:

$$a_۶ - a_۱ = ۲۴ \Rightarrow a_۱q^۵ - a_۱ = ۲۴ \Rightarrow a_۱(q^۵ - ۱) = ۲۴$$

از طرفی $S_۵ = ۱۲$ است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow S_۵ = \frac{a_۱(۱ - q^۵)}{۱ - q} \xrightarrow{a_۱(q^۵ - ۱) = ۲۴} ۱۲ = \frac{-۲۴}{۱ - q} \Rightarrow ۱ - q = \frac{-۲۴}{۱۲} \Rightarrow ۱ - q = -۲ \Rightarrow q = ۳$$

۴۳ | ۲ می‌دانیم اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲ = ac$. پس ابتدا مقدار x را به‌دست می‌آوریم و به‌کمک آن q را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \dots \Rightarrow \text{دنبالهٔ نزولی} \\ x = -۱ \Rightarrow ۲, -۱, \frac{۱}{۲}, \dots \Rightarrow \text{دنبالهٔ غیرنزولی} \Rightarrow q = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{a(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow S_۶ = \frac{a_۱(۱ - q^۶)}{۱ - q} = \frac{۲\left(۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۶\right)}{۱ - \left(-\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۲\left(۱ - \frac{۱}{۶۴}\right)}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\left(\frac{۶۳}{۶۴}\right)}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳} \times \frac{۶۳}{۶۴} = \frac{۲۱}{۱۶}$$

۴۴ **۴** طبق واسطهٔ هندسی بین سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a^2 = 4\times 9 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \Rightarrow 4, 6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله صعودی است.} \\ a = -6 \Rightarrow 4, -6, 9, \dots \Rightarrow \text{دنباله نه صعودی و نه نزولی است.} \end{cases}$$

پس $a = 6$ قابل قبول است و در نتیجه $q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ می‌شود. بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{4\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{3}{2}} = \frac{4\left(1-\frac{729}{64}\right)}{-\frac{1}{2}} = -8\left(1-\frac{729}{64}\right) = -8\left(-\frac{665}{64}\right) = \frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$$

۴۵ **۴** با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1)$ داریم:

$$\begin{cases} S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153 \\ S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}} \frac{\frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}}{\frac{\cancel{a_1}(1-q^3)}{\cancel{1-q}}} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

$$\xRightarrow{\text{مزدوج}} \frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

حال نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

یادت باشه در تست‌های این بخش، هر جا در معادله‌ای $(1-q)$ رو با هم ساده کردیم، با فرض $q \neq 1$ این کار رو انجام دادیم.

تذکر: با توجه به درسنامه بین مجموع n جملهٔ اول و مجموع $2n$ جملهٔ اول، رابطهٔ $\frac{S_m}{S_n} = q^n + 1\ (q \neq \pm 1)$ برقرار است. بنابراین در این تست از همان ابتدا می‌توانستیم بگوییم $\frac{S_6}{S_3} = q^3 + 1$ تا محاسبات ما بسیار کوتاه‌تر شود. در تست‌های بعد هم می‌توانید در صورت امکان این کار را انجام دهید.

۴۶ **۱** از معادلهٔ $S_{10} = (4\sqrt{2}+1)S_5$ مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس حاصل $\frac{S_8}{S_4}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{10} = (4\sqrt{2}+1)S_5 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^{10})}{\cancel{1-q}} = (4\sqrt{2}+1)\left(\frac{\cancel{a_1}(1-q^5)}{\cancel{1-q}}\right) \xRightarrow{\text{مزدوج}} \cancel{(1-q^5)}(1+q^5) = (4\sqrt{2}+1)\cancel{(1-q^5)}$$

$$1+q^5 = 4\sqrt{2}+1 \Rightarrow q^5 = 4\sqrt{2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = (\sqrt{2})^5 \Rightarrow q = \sqrt{2} \qquad (*)$$

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{\cancel{a}(1-q^8)}{\cancel{1-q}}}{\frac{\cancel{a}(1-q^4)}{\cancel{1-q}}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} \xlongequal{\text{مزدوج}} \frac{\cancel{(1-q^4)}(1+q^4)}{\cancel{1-q^4}} = 1+q^4 \xlongequal{(*)} 1+(\sqrt{2})^4 = 1+2^2 = 5$$

۴۷ **۲**

$$\frac{a_1a_2a_3}{(a_4)^3} = \frac{a_1\times a_1q\times a_1q^2}{(a_1q^3)^3} = 64 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1^3}q^3}{\cancel{a_1^3}q^9} = 64 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{دنبالهٔ نزولی با جملهٔ اول مثبت}} q = \frac{1}{2}$$

باز هم یادآور می‌شویم که اگر $q < 0$ باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است. حال $\frac{S_6}{a_1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{S_6}{a_1} = \frac{\frac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{1-q}}{\cancel{a_1}} = \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

۴۸ **۳** چون شش جمله درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل ۸ جمله دارد که جملهٔ اول ۲ و جملهٔ هشتم برابر $16\sqrt{2}$ است:

$$a_8 = a_1q^7 \Rightarrow 16\sqrt{2} = 2q^7 \Rightarrow 8\sqrt{2} = q^7 \Rightarrow 2^3\times 2^{\frac{1}{2}} = q^7 \Rightarrow 2^{\frac{7}{2}} = q^7 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^7 = q^7 \Rightarrow (\sqrt{2})^7 = q^7 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_8 = \frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}} = \frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{-30}{1-\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 30(\sqrt{2}+1)$$

۴۹ | ۳

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 3 \Rightarrow \frac{a_1\cancel{(1-q)}(1+q)(1+q^2)}{\cancel{1-q}} = 3 \Rightarrow a_1(1+q)(1+q^2)=3$$

$$a_1+a_3=1 \Rightarrow a_1+a_1q^2=1 \Rightarrow a_1(1+q^2)=1$$

از تقسیم دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{\cancel{a_1}(1+q)\cancel{(1+q^2)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1+q^2)}} = 3 \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2 \xrightarrow{a_1(1+q^2)=1} a_1=\frac{1}{5} \Rightarrow S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{-1}=\frac{1}{5}(63)=12/6$$

۵۰ | ۱ **روش اول:** هر لایه، مقداری از مواد، مضر را جذب و مقداری را رد می‌کند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا مجموع جذب لایه‌ها بیشتر از ۹۷ درصد شود.

اولین لایه، نصف مواد مضر را جذب و نصف آن را رد می‌کند، دومین لایه از نیم باقی مانده، نیمی از مواد مضر یعنی $\frac{1}{4}$ آن را جذب می‌کند و به همین ترتیب مقداری که هر لایه، مواد مضر را جذب می‌کند به‌صورت دنبالهٔ زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ می‌باشد. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از جملات این دنباله جمع شود تا حاصل، حداقل ۹۷ درصد شود:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\cancel{\frac{1}{2}}}} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \ge \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \ge \frac{100}{3} \simeq 33/3 \Rightarrow n \ge 6$$

توجه کنید که با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادلهٔ $2^n \ge 33/3$ و این‌که $64=2^6$، در می‌یابیم که حداقل مقدار n برابر ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل ۶ تا باشد.

روش دوم: وقتی می‌گوییم ۹۷ درصد مواد، جذب لایه‌های محافظتی شده، بدین معنی است که ۳ درصد مواد مضر از لایه‌ها رد شده‌اند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا کم‌تر از ۳ درصد مواد از لایه‌ها خارج شوند. اولین لایه شدت تابش را $\frac{1}{2}$ می‌کند، یعنی نصف مواد مضر از آن رد می‌شوند، لایهٔ دوم از نیم باقی‌مانده، نیمی از مواد مضر یعنی $\frac{1}{4}$ را رد می‌کند و به همین ترتیب در لایهٔ nاُم $\frac{1}{2^n}$ از مواد مضر از آن خارج می‌شود. بنابراین:

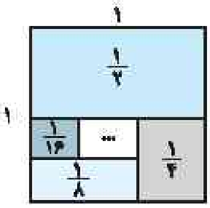
$$\frac{1}{2^n} \le \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \ge \frac{100}{3} \Rightarrow n \ge 6$$

روش اول، روش کتاب درسیه، اما روش دوم، سریع‌تر و کوتاه‌تره. سعی کن مفهوم هر دو روش رو خوب یاد بگیری.

۵۱ | ۲ **روش اول:** مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحلهٔ اول $\frac{1}{2}$، مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}$، مرحلهٔ سوم $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$ می‌دهند:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد:



$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n \ge \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ge \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \ge 100 \Rightarrow n \ge 7$$

یعنی بعد از مرحلهٔ هفتم، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این‌که بگوییم، مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{99}{100}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{1}{100}$ باشد. در مرحلهٔ اول $\frac{1}{2}$، مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}$، مرحلهٔ سوم $\frac{1}{8}$ و به همین ترتیب در مرحلهٔ nاُم، $\frac{1}{2^n}$ از مساحت مربع رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \ge 100 \Rightarrow n \ge 7$$

۵۲ | ۳ می‌دانیم اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی a_1، قدرنسبت آن q و تعداد جملات آن n باشد، آن‌گاه مجموع تمام جملات برابر است با:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

دنبالهٔ جملات ردیف فرد، یک دنبالهٔ هندسی است که جملهٔ اول آن a_1، قدرنسبت آن q^2 و تعداد جملات آن $\frac{n}{2}$ می‌باشد. پس مجموع جملات ردیف فرد برابر است با:

$$S_{\frac{n}{2}}=\frac{a_1\left(1-(q^2)^{\frac{n}{2}}\right)}{1-q^2}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q^2}$$

در نتیجه داریم:

$$S_n=3S_{\frac{n}{2}}\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}(\cancel{1-q^n})}{1-q}=3\times\frac{\cancel{a_1}(\cancel{1-q^n})}{1-q^2}\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\frac{3}{1-q^2}\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\frac{3}{(1-q)(1+q)}\Rightarrow\frac{3}{1+q}=1\Rightarrow q+1=3\Rightarrow q=2$$

۵۳ **۴** جملات اول، دوم و ششم دنبالهٔ حسابی به‌صورت a، $a+d$ و $a+5d$ هستند چون این جملات، تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$a(a+5d)=(a+d)^2\Rightarrow\cancel{a^2}+5ad=\cancel{a^2}+d^2+2ad\Rightarrow 3ad=d^2\xRightarrow{d\neq0}d=3a$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)\Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}(2a+9d)\xRightarrow{d=3a}S_{10}=5(2a+27a)=5(29a)=145a$$

۵۴ **۲** **روش اول:** جملات اول، پنجم و هفدهم دنبالهٔ حسابی به‌صورت a، $a+4d$ و $a+16d$ هستند. چون این جملات، تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند پس می‌توان نوشت:

$$a(a+16d)=(a+4d)^2\Rightarrow\cancel{a^2}+16ad=\cancel{a^2}+16d^2+8ad\Rightarrow 8ad=16d^2\xRightarrow{d\neq0}a=2d$$

با جایگزینی $a=2d$ جملات a، $a+4d$ و $a+16d$ به‌صورت $2d$، $6d$ و $18d$ در می‌آیند. چون این اعداد، جملات متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، پس $q=3$ می‌شود. حال مجموع چهار جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را به‌دست می‌آوریم:

$$S_4=\frac{a(1-q^4)}{1-q}=\frac{a(1-3^4)}{1-3}=\frac{a(-80)}{-2}=40a$$

یادآوری: اگر در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت جملات mاُم، nاُم و pاُم $(p>n>m)$ به‌ترتیب جملات متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $q=\frac{p-n}{n-m}$ به‌دست می‌آید.

روش دوم: با توجه به مطلب بالا $q=\frac{17-5}{5-1}=\frac{12}{4}=3$ می‌باشد و در ادامه مانند راه حل اول $S_4=40a$ به‌دست می‌آید.

۵۵ **۲** **روش اول:** عبارت $1+x+x^2+\cdots+x^8$، مجموع ۹ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=x$ و عبارت $1-x+x^2-\cdots+x^8$، مجموع ۹ جمله اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=-x$ می‌باشد بنابراین با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$A=\frac{1(1-x^9)}{1-x}\times\frac{1-(-x)^9}{1+x}=\frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)}\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}}\frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2}=\frac{1-2^9}{1-2}=\frac{1-512}{-1}=511$$

روش دوم: از اتحادهایی که در درسنامه به آن‌ها اشاره شد استفاده می‌کنیم:

$$(\text{طبیعی } n)\quad x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\Rightarrow x^9-1=(x-1)(x^8+x^7+\cdots+1)$$

$$(\text{طبیعی و فرد } n)\quad x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\Rightarrow x^9+1=(x+1)(x^8-x^7+\cdots+1)$$

$$\Rightarrow A=(1+x+x^2+\cdots+x^8)(1-x+x^2-\cdots+x^8)=\frac{x^9-1}{x-1}\times\frac{x^9+1}{x+1}=\frac{x^{18}-1}{x^2-1}\xlongequal{\text{مانند روش اول}}511$$

۵۶ **۱** عبارت $A=1+t+t^2+\ldots+t^{10}+t^{11}$، مجموع ۱۲ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=t$ می‌باشد. هم‌چنین عبارت $B=1+t^3+t^6+t^9$ مجموع ۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدرنسبت $q=t^3$ می‌باشد، بنابراین:

$$A=S_{12}=\frac{1(1-t^{12})}{1-t}$$

$$B=S_4=\frac{1(1-t^{12})}{1-t^3}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{1-t^3}{1-t}=\frac{(\cancel{1-t})(1+t+t^2)}{\cancel{1-t}}=1+t+t^2=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=1+\frac{\cancel{2\sqrt{5}}-2+6-\cancel{2\sqrt{5}}}{4}=1+1=2$$

۵۷ **۳** **روش اول:** می‌دانیم حاصل تقسیم دو جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی برابر قدرنسبت است:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{27}$$

در نتیجه نسبت مجموع چهار جملهٔ اول به مجموع چهار جملهٔ دوم برابر است با:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5+a_6+a_7+a_8}=\frac{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}{a_1q^4+a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7}=\frac{\cancel{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}}{q^4(\cancel{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3})}=\frac{1}{q^4}=\frac{1}{(\sqrt[4]{27})^4}=\frac{1}{27}$$

روش دوم: قدرنسبت مانند روش اول برابر $q=\sqrt[4]{27}$ است.

مجموع چهار جملهٔ اول S_4 و مجموع چهار جملهٔ دوم S_8-S_4 می‌باشد. حال می‌خواهیم $\frac{S_4}{S_8-S_4}$ را تعیین کنیم. برای راحتی کار ابتدا $\frac{S_8-S_4}{S_4}$ را به‌دست آورده و جواب حاصل را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{S_8}{S_4}-1=\frac{\frac{a(1-q^8)}{\cancel{1-q}}}{\frac{a(1-q^4)}{\cancel{1-q}}}-1=\frac{1-q^8}{1-q^4}-1=\frac{(\cancel{1-q^4})(1+q^4)}{\cancel{1-q^4}}-1=1+q^4-1=q^4=(\sqrt[4]{27})^4=27\Rightarrow\frac{S_4}{S_8-S_4}=\frac{1}{27}$$

۵۸ **۴** می‌دانیم اگر a، b و c دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه $b^2=ac$ است، بنابراین:

$$(2x)^2=(x^2-2)(x^2+4)\Rightarrow 4x^2=x^4+2x^2-8\Rightarrow x^4-2x^2-8=0\Rightarrow (x^2)^2-2(x^2)-8=0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+2=0\Rightarrow x^2=-2 \ (\text{غ‌ق‌ق})\\ x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\end{cases}$$

از جواب $x=-2$ دنبالهٔ هندسی $8,-4,2,\cdots$ به‌دست می‌آید که نزولی نیست، اما از جواب $x=2$ دنبالهٔ هندسی نزولی $8,4,2,\cdots$ به‌دست می‌آید که قدرنسبت آن برابر $q=\frac{1}{2}$ و $a_1=8$ است. در نتیجه داریم:

$$S_7=\frac{8\left(1-(\frac{1}{2})^7\right)}{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}}=16\left(1-(\frac{1}{2})^7\right)=16-16\times\frac{1}{2^7}=16-\frac{\cancel{2^4}}{\underbrace{\cancel{2^7}}_{2^3}}=16-\frac{1}{8}=\frac{127}{8}$$

اگه نحوهٔ حل معادلهٔ $x^4-2x^2-8=0$ رو خوب نفهمیدی، در بخش بعدی این نوع معادلات رو توضیح می‌دیم.

۵۹ **۳** تعداد گندم‌های موجود در هر خانه تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند که جملهٔ اول آن ۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد. تعداد کل گندم‌ها حاصل جمع جملات این دنباله است:

جملات دنباله : $1,2,4,8,\cdots$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1=(2^4)^{16}-1=16^{16}-1$$

حال $2^{64}-1$ گرم را با ۱۰۰۰ میلیارد تن مقایسه می‌کنیم. (با صرف‌نظر کردن از یک گرم عدد $2^{64}-1$ را به‌صورت ساده‌تر 2^{64} می‌نویسیم.) می‌دانیم هزار میلیارد برابر 10^{12} و هر یک تن برابر 10^6 گرم است، پس هزار میلیارد تن برابر 10^{18} گرم می‌باشد. از طرفی $10^{18}=(10^3)^6$ و $2^{64}=(2^{10})^6\times 2^4$ است. بنابراین داریم:

$$2^{10}=1024\ ,\ 10^3=1000\Rightarrow 2^{10}>10^3\Rightarrow (2^{10})^6>(10^3)^6\Rightarrow 2^4(2^{10})^6>(10^3)^6\Rightarrow 2^{64}>10^{18}$$

پس وزن کل گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است. (البته با مقایسهٔ بالا حتی می‌توان گفت از ۱۶۰۰۰ میلیارد تن هم بیشتر است.)

این مسئله به نام مسئلهٔ شطرنج معروفه که ابوریحان بیرونی، ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی به روش خاص خودش اون رو حل کرده. عدد حاصل، این قدر زیاده که اگه کل مساحت کرهٔ زمین رو هم گندم بکاریم باز پاسخ‌گوی این میزان گندم نیست.

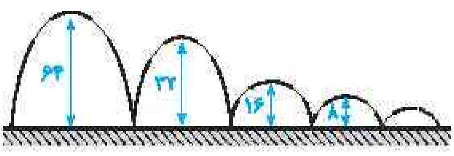
۶۰ **۴** جملات دنباله به‌صورت $1,2,4,8,\cdots$ است که باید $S_n\geq 64(1000)$ باشد. (هر کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است.) در نتیجه داریم:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}\geq 64(1000)\Rightarrow 2^n-1\geq 64(1000)\Rightarrow 2^n\geq 64(1000)+1$$

برای حل ساده‌تر نامعادلهٔ بالا ابتدا از عدد ۱ صرف‌نظر می‌کنیم:

$$2^n\geq 64(1000)\Rightarrow 2^n\geq 2^6(1000)\Rightarrow\frac{2^n}{2^6}\geq 1000\Rightarrow 2^{n-6}\geq 1000$$

می‌دانیم $2^{10}=1024$ و $2^9=512$ می‌باشد، بنابراین نامعادلهٔ بالا زمانی برقرار است که $n-6\geq 10$ و در نتیجه $n\geq 16$ باشد.



۶۱ **۳** وقتی توپ را پرتاب می‌کنیم، ۶۴ متر بالا می‌رود و بعد ۶۴ متر پایین می‌آید، یعنی از لحظهٔ پرتاب تا برخورد اول $2\times 64=128$ متر مسافت طی می‌کند، سپس ۳۲ متر بالا و ۳۲ متر پایین می‌آید، یعنی در مرحلهٔ دوم ۶۴ متر طی می‌کند. بنابراین دنبالهٔ مسافت‌های طی‌شده (برحسب متر) در هر مرحله به‌صورت مقابل است:

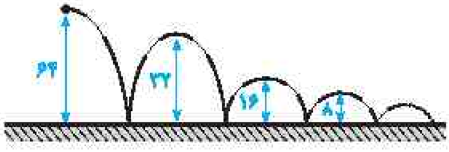
$128,64,32,\cdots$

این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=128$ و قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$ است.

برای این‌که کل مسافت پیموده شده در لحظه‌ای که توپ برای بار دهم به زمین برخورد می‌کند را حساب کنیم، کافی است S_{10} را به‌دست آوریم:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_{10}=\frac{128\left(1-(\frac{1}{2})^{10}\right)}{\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}}=256\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)=256\left(\frac{2^{10}-1}{2^{10}}\right)=\cancel{2^8}\left(\frac{1024-1}{\underbrace{\cancel{2^{10}}}_{2^2}}\right)=\frac{1023}{4}=255/75\ \text{متر}$$

سؤال: در شرایط این تست اگر توپ را از ارتفاع ۶۴ متری رها کنیم چه مسافتی را طی خواهد کرد؟



در این حالت توپ فقط در مرتبهٔ اول برخورد به زمین، یک مسافت از بالا به پایین را طی می‌کند. اما در مراتب بعدی یک مسافت پایین به بالا و یک مسافت بالا به پایین را طی می‌کند. یعنی در اولین برخورد ۶۴ متر، دومین برخورد $۶۴ = ۳۲\times ۲$ متر و سومین برخورد $۳۲ = ۱۶\times ۲$ متر را می‌پیماید که به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. یعنی کل مسافت حاصل $۶۴+۶۴+۳۲+۱۶+\cdots+a_{۱۰}$ می‌باشد که ۶۴ متر کم‌تر از حاصل این تست می‌باشد، بنابراین: $۲۵۵/۷۵-۶۴=۱۹۱/۷۵$.

۶۲ **۴** اگر موجودی اولیه را m درنظر بگیریم، بعد از یک سال، سود آن برابر $\frac{۲}{۱۰}m=\frac{۲۰}{۱۰۰}m$ است. پس در پایان سال اول، موجودی برابر $a_۱=m+\frac{۲}{۱۰}m=m(۱+\frac{۲}{۱۰})$ می‌شود، در نتیجه در پایان سال دوم، موجودی برابر است با:

$$a_۲=a_۱+\frac{۲}{۱۰}a_۱=a_۱(۱+\frac{۲}{۱۰})=m(۱+\frac{۲}{۱۰})(۱+\frac{۲}{۱۰})=m(۱+\frac{۲}{۱۰})^۲$$

به همین ترتیب مقدار موجودی در هر سال، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱۲}{۱۰}=\frac{۲}{۱۰}+۱$ می‌باشد. بنابراین مقدار موجودی بعد از n سال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n=m(۱+\frac{۲}{۱۰})^n \Rightarrow a_۵=۲۰۰۰۰۰۰(۱+\frac{۲}{۱۰})^۵=۲\times۱۰^۶(\frac{۱۲}{۱۰})^۵=۲\times \cancel{۱۰^۶}^{۱۰}\times\frac{۱۲^۵}{\cancel{۱۰^۵}}\simeq ۲۰(۲۵۰۰۰)=۵۰۰۰۰۰$$

۶۳ **۱** محیط دایره به قطر d برابر است با $P=\pi d$، پس محیط نیم‌دایره $\frac{\pi d}{۲}$ می‌باشد.

در این سؤال هر بار که موج به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کم می‌شود، یعنی ۸۰ درصد از طول قطر آن باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

دنبالهٔ طول قطرها: $۱, ۰/۸, (۰/۸)^۲, \cdots$ ، دنبالهٔ محیط نیم‌دایره‌ها: $\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}(۰/۸), \frac{\pi}{۲}(۰/۸)^۲, \cdots$

ملاحظه می‌شود که محیط نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\frac{\pi}{۲}$ و قدرنسبت ۰/۸ می‌دهند، در نتیجه:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_۵=\frac{\frac{\pi}{۲}(۱-(\frac{۴}{۵})^۵)}{\underbrace{۱-\frac{۴}{۵}}_{\frac{۱}{۵}}}\Rightarrow S_۵=\frac{۵\pi}{۲}(۱-(\frac{۴}{۵})^۵)$$

۶۴ **۱** کافی است هر یک از کسرها را به صورت زیر تفکیک کنیم:

$$\frac{۱}{۲\times۵}=\frac{۱}{۳}(\frac{۵-۲}{۲\times۵})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۵})\ ;\ \frac{۱}{۵\times۸}=\frac{۱}{۳}(\frac{۸-۵}{۵\times۸})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸})$$

به همین ترتیب همهٔ کسرها را تفکیک کرده و از $\frac{۱}{۳}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۲\times۵}+\frac{۱}{۵\times۸}+\cdots+\frac{۱}{۱۷\times۲۰}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\cancel{\frac{۱}{۵}}+\cancel{\frac{۱}{۵}}-\cancel{\frac{۱}{۸}}+\cancel{\frac{۱}{۸}}-\cancel{\frac{۱}{۱۱}}+\cancel{\frac{۱}{۱۱}}-\cdots-\cancel{\frac{۱}{۱۷}}+\cancel{\frac{۱}{۱۷}}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰})=\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۱۵$$

معمولاً بررسی این نوع سؤال‌ها در کتاب نظام قدیم بخش سری مطرح می‌شد. و میشه گفت به دنبالهٔ حسابی قبلی ربط نداره! پس اگه راه‌حل این تست به ذهنت نرسید نگران نباش.

۶۵ **۴** ابتدا از $x^۳$ فاکتور می‌گیریم و بعد از اتحاد چاق و لاغر $(a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲))$ استفاده می‌کنیم:

$$x^۹+x^۳y^۳=x^۳(x^۶+y^۳)=x^۳((x^۲)^۳+y^۳)=x^۳(x^۲+y)(x^۴-x^۲y+y^۲)$$

۶۶ **۱** می‌دانیم اگر n فرد باشد $(x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-۲}y+\cdots+y^{n-1}))$، یعنی x^n+y^n بر $x+y$ بخش‌پذیر است، بنابراین عبارت $(x^۳+x^۲+۱)^۹+(x^۳-x^۲+۳)^۹$ نیز بر $x^۳+\cancel{x^۲}+۱+x^۳\cancel{-x^۲}+۳=۲(x^۳+۲)$ بخش‌پذیر است.

۶۷ **۱** با استفاده از اتحاد $(x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-۲}y+\cdots+y^{n-1}))$ طبیعی و فرد n عبارت $x^۷+۱$ را تجزیه می‌کنیم:

$$A=\frac{\cancel{(x+۱)}(x^۶-x^۵+x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x+۱)}\cancel{(x-۲)}}+x^۵+x^۳+x=x^۶+x^۴+x^۲+۱$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{۳}}(\sqrt{۳})^۶+(\sqrt{۳})^۴+(\sqrt{۳})^۲+۱=۳^۳+۳^۲+۳+۱=۴۰$$